4. Stokes-Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{0} &= -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \; (+\rho \underline{b}) \\ 0 &= \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned}} \qquad (4.1)$$

4.2 Biharmonische Gleichung

• Herleitung:

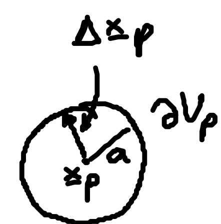
$$\operatorname{div}\left(\underline{0} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}\right) \xrightarrow[\operatorname{div}\underline{v}=0]{}$$

$$\underline{\nabla}^2 \left(\ldots\ldots \quad \ldots \right) \xrightarrow[(4.4a)]{}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla}^2 p &= 0 \qquad (4.4a) \\ \underline{\nabla}^2 \underline{\nabla}^2 \underline{v} &= 0 \qquad (4.4b) \end{aligned}}$$

NB: separate Gln. für $\underline{v}$ und p!

• Hilfsatz:
Geometrie



Kugel

Oberflächenintegral: $\underline{v}(\underline{x})$ löse Stokes Gln. (4.1)

$$\boxed{\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{v}(x)\, df = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p)} \qquad (4.5)$$

• Beweis: verwendet Gl. (4.4b)

(1) Taylor $\xrightarrow[\underline{x} - \underline{x}_p]{\Delta \underline{x}_p}$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta \underline{x}_p \cdot \underline{\nabla}_p \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2} (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p) \cdot (\underline{\nabla}_p \otimes \underline{\nabla}_p) \underline{v}(\underline{x}_p)$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} \; \text{"} (\Delta \underline{x}_p)^n \cdot \underline{\nabla}_p^n \text{"} \; \underline{v}(\underline{x}_p)$$

(2) $\frac{1}{4\pi a^2}\int \underline{v}(\underline{x})\, df \longrightarrow$

(i) $\int (\Delta x_p)^n df = 0$, n ungerade

[$\Delta \underline{x}_p$ und $-\Delta x_p$ kommen vor]

(ii) $\underbrace{\int (\Delta x_p \otimes \Delta x_p)}\, df = \frac{4\pi}{3} a^4 \underline{\underline{1}}$

denn: $= c\,\underline{\underline{1}}$, wegen Isotropie der Oberfläche, keine Richtung ausgezeichnet

$\xrightarrow{Sp(\ldots)} 3c = a^2 \int_{\partial V} df = 4\pi a^4$

$\longrightarrow c = \frac{4\pi}{3} a^4$

(iii) $\int \underbrace{(\Delta x_p \otimes \Delta x_p \otimes \ldots)}_{n\text{-mal}} df \sim \underline{\underline{1}}^{n/2} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots$

Isotropie

in (1)

$n \geq 4$

$\ldots \nabla_p^2 \nabla_p^2 \ldots \underline{v}(x_p) \overset{(4.4b)}{=} 0$

(1) & (2) $\longrightarrow$

$\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi a^2}\frac{4\pi}{3} a^4 = \frac{1}{6} a^2$!

4.3 Oseen Tensor

- (4.1) $\equiv$ lineare Dgl. in $\underline{v}$ und p $\longrightarrow$ Methode der Greenschen Funktion (Superpositionsprinzip!)

$\longrightarrow$ Lsg. von (4.1) für vorgegebenes $\rho\underline{b}(\underline{x})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \int d^3x'\ \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,\rho\underline{b}(\underline{x}') \\ p(\underline{x}) &= \int d^3x'\ \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot\rho\underline{b}(\underline{x}') \end{aligned}} \quad (4.6)$$

mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')$ ... Oseen-Tensor
$\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')$ ... Druck-Vektor } Greensche Funktionen

NB: (i) $\underline{\underline{O}}$ ... Tensor 2. Stufe
(ii) $\underline{g}$ ... Vektor

- Bestimmungsgln. für $\underline{\underline{O}}$ und $\underline{g}$:

(4.6) in (4.1)

$$\longrightarrow \begin{cases} \underline{0} = \int d^3x' \left\{ -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot \underline{\rho}^b(\underline{x}')\right] + \eta \underline{\nabla}^2\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right]\right\} + \underline{\rho}^b(\underline{x}) \\ 0 = \int d^3x' \, \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\underline{\rho}^b(\underline{x}')\right] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[=\underline{e}\,\delta(\underline{x}')]{\underline{\rho}^b(\underline{x}')} \begin{cases} \underline{0} = -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x})\cdot\underline{e}\right] + \eta\underline{\nabla}^2\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\underline{e}\right] + \underline{e}\,\delta(\underline{x}) \\ 0 = \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\underline{e}\right] \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\underline{e} \text{ beliebig}} \boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla}\otimes\underline{g}(\underline{x}) - \eta\underline{\nabla}^2\underline{\underline{O}}(\underline{x}) &= \mathbb{1}\;\delta(\underline{x}) \quad &(4.7a) \\ \operatorname{div}\underline{\underline{O}}^t(\underline{x}) &= \underline{0} \quad &(4.7b) \end{aligned}}$$

- Lösung: für $V\to\infty$, $\underline{v}\big|_{\partial V} = \underline{0}$ ... unendliches Volumen

(i) Druck-Vektor $\underline{g}$:

$\operatorname{div}\left[(4.7a)^t\right]$ & (4.7b)

„möchte mit $\underline{\nabla}$ kontrahieren"

$$\longrightarrow \underline{\nabla}^2 \underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.8)$$

Einschub: Elektrostatik: $\underline{\nabla}^2 \underbrace{\frac{1}{r}}_{\substack{\text{Greensche Fkt.} \\ \text{der Poissongl.}}} = -4\pi\,\delta(\underline{x}) \quad (4.9), \quad r = |\underline{x}|$

$\underline{\nabla}$ (4.9) & vgl. (4.8)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}\frac{\underline{x}}{r^3}} \quad (4.10)$$

... „Dipol"

Beweis: $\underline{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\underbrace{\underline{\nabla} r}_{\hat{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{r}} = -\frac{\underline{x}}{r^3}$ qed

(ii) Oseen-Tensor $\underline{\underline{O}}$:

(4.10) in (4.7a)

$$\longrightarrow -\frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\otimes\underline{\nabla})\frac{1}{r} - \eta\underline{\nabla}^2\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \underline{\underline{1}}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.11)$$

<u>Ansatz</u>: $\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\eta}\left(\frac{1}{r}\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tilde{O}}}\right)$ (4.12)

$$\xrightarrow{\text{in (4.11)}} \quad \underline{\nabla}^2\underline{\underline{\tilde{O}}} = -(\underline{\nabla}\otimes\underline{\nabla})\frac{1}{r} \overset{\text{o.B.}}{=} \frac{1}{r^3}\underline{\underline{1}} - 3\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^5} \quad (4.13)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r} = \delta(\underline{x})$$

<u>Ansatz</u>: $\underline{\underline{\tilde{O}}} = \frac{1}{r}\left(c_1\underline{\underline{1}} + c_2\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)$ in (4.13)

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{O}}}(\underline{x}) = \frac{1}{2r}\left(\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2} - \underline{\underline{1}}\right) \quad (4.14)$$

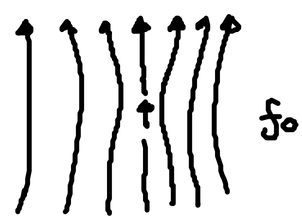
$$\xrightarrow{(4.12)\ \&\ (4.14)} \quad \boxed{\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)} \quad (4.15)$$

... <u>Oseen-Tensor</u>

- Geschw.feld einer Punktquelle: $\underline{f}^b(\underline{x}) = \underline{f}_0\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

$$\xrightarrow{\text{in (4.6)}} \quad \boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\underline{f}_0} \quad (4.16)$$

... Stokeslet



Anisotropie:

(i) $\underline{x}-\underline{x}_0 \parallel \underline{f}_0 \longrightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{4\pi\eta r}$

(ii) $\underline{x}-\underline{x}_0 \perp \underline{f}_0 \longrightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{8\pi\eta r}$, $r = |\underline{x}-\underline{x}_0|$

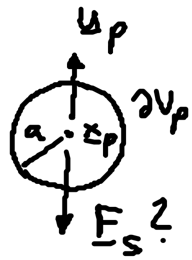
<u>NB</u>: allgemein: $\underline{v}(\underline{x}) \equiv$ Superposition von Stokeslets

- wichtige Anwendung: hydrodynamische Wechselwirkungen (HW) s. Kap. 6

4.4 <u>Stokes Reibung</u>

- 2 Standardsituationen:

(i) linear bewegte Kugel (ii) rotierende Kugel



Reibungskraft $\underline{F}_s$?

Reibungsdrehmoment $\underline{M}_s$?

Berechne $\underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\underline{\Pi}} \longrightarrow \underline{F}_s, \underline{M}_s$

a) <u>Translation</u>

- Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0, \quad r = |\underline{x}| \longrightarrow \infty \\ \text{(ii)} & \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_p, \quad \underline{x} \in \partial V_p \end{array}\right\} \quad (4.17)$$

- <u>1. Weg</u>: mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')$

Ansatz: Oberflächenkraftdichte von Kugel auf Flüssigkeit

$$S^{\underline{k}}(\underline{x}')\Big|_{\underline{x}'\in\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\,\underline{u}_p \quad (4.18)$$

... konstant auf ∂V_p !!!

$$\longrightarrow \quad \underline{v}(\underline{x}) \underset{(4.6)}{=} \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underbrace{\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{\substack{\text{Lsg. der Stokes Gln.} \\ \text{f}= \ \underline{x}-\underline{x}' \neq 0}} \underline{u}_p \, df' \quad (4.19)$$

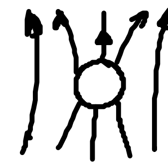
mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-(\underline{x}_p+\Delta\underline{x}_p))$

& Hilfssatz (4.5)

$$\longrightarrow \quad \underline{v}(\underline{x}) = c\left(1+\frac{1}{6}a^2\nabla_p^2\right)\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p$$

$$\text{RB: } (4.17)\,\text{(ii)} \xrightarrow[\underline{v}(\underline{x})|_{\partial V_p} = \underline{u}_p]{(0.B)} c = 6\pi\eta a \quad (4.20)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \underline{\underline{S}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p \\ \text{mit } \underline{\underline{S}}(\underline{x}) &= 6\pi\eta a\left(\underline{\underline{1}}+\frac{1}{6}a^2\nabla^2\right)\underline{\underline{O}}(\underline{x}) \\ &\overset{\text{o.B.}}{=} \frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\underline{\underline{1}}+\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\underline{\underline{1}}-3\,\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)\end{aligned}} \qquad (4.21)$$



NB: für $r \gg a$: $\underline{v}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underbrace{6\pi\eta a\,\underline{u}_p}_{\underline{F}=-\underline{F}_s\,!\ \text{s.u.}}$

... Stokeslet!

- 2 Weg: löse (4.1) direkt $\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x})$ [s. Übungen]

- <u>Stokessche Reibungskraft:</u>

1. Weg: $\underline{F}_s \overset{\text{actio = reactio}}{=} -\oint_{\partial V_p} \rho\, \underline{b}(\underline{x})\, df \overset{(4.18)}{=} -c\,\underline{u}_p \underbrace{\oint_{\partial V_p} \frac{df}{4\pi a^2}}_{=1}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{F}_s = -6\pi\eta a\,\underline{u}_p} \qquad (4.22)$$

.... gültig für $t \gg \tau_H = \dfrac{a^2}{6\eta/\rho}$!

2. Weg: $\underline{v}(x),\ p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\underline{T}} = -p\,\underline{\underline{1}} + 2\eta\,\underline{\underline{\Lambda}}$

$\longrightarrow \underline{F}_s = \oint_{\partial V_p} \underline{\underline{T}}\, d\underline{f}$ [etwas Arbeit!]