

7.2. Elastohydrodynamik dünner Stäbe

a) Kinematik: Randkurve $\underline{r}(s)$

Tangentenvektor $\underline{\hat{e}}(s) = \frac{d\underline{r}(s)}{ds}$ mit $|\underline{\hat{e}}| = 1$

Krümmung $\frac{1}{R} = \left| \frac{d\underline{\hat{e}}}{ds} \right|$

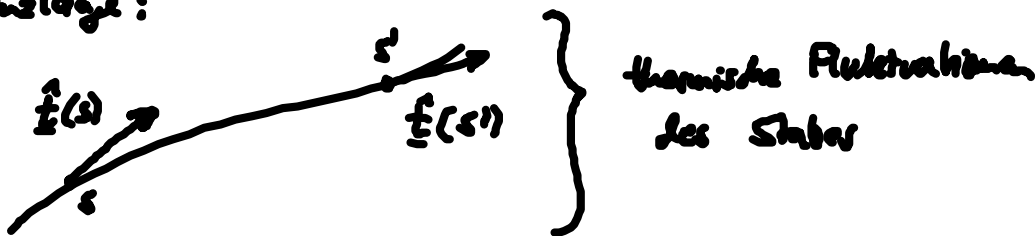
b) Elastizitätstheorie:

Biegemomente: harmonische Näherung

$$F = \frac{1}{2} k_B T \ell_p \int_0^L \frac{1}{R^2} ds = \frac{1}{2} k_B T \ell_p \int_0^L \left(\frac{d\underline{\hat{e}}}{ds} \right)^2 ds \quad (7.2)$$

$k_B T \ell_p$... Biegekonstante = $k_B T \times$ Persistenzlänge

. Persistenzlänge:



→ Tangentialkorrelation im thermodyn. GG:

$$\langle \underline{\hat{e}}(s) \cdot \underline{\hat{e}}(s') \rangle = e^{-|s-s'|/\ell_p} \quad (7.3)$$

Beweis: s. Übung

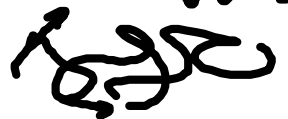
Datum (i) $|s-s'| \ll \ell_p \rightarrow \langle \underline{\hat{e}}(s) \cdot \underline{\hat{e}}(s') \rangle \approx 1$

Filament ist gerade

(ii) $|s-s'| \gg \ell_p \rightarrow \langle \underline{\hat{e}}(s) \cdot \underline{\hat{e}}(s') \rangle \approx 0$

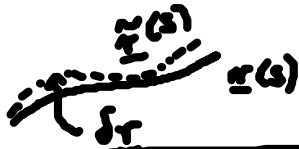
Filament beliebig gebogen!

→ Auf Persistenzlänge ℓ_p behält Filament seine Richtung bei



- (ii) also: L : Gesamtlänge
 $L \gg \ell_p$... flexible Filament
 $L \approx \ell_p$... semiflexible Filament
 $L \ll \ell_p$... starrs F.

• Führe ein: Biegekraft über Variation des Biegeenergie δF für Variation der Filamentkonfiguration: $\delta \underline{r}(s) = \underline{r}'(s) - \underline{r}(s)$ mit $\frac{|\delta \underline{r}|}{|\underline{r}|} \ll 1$



$$\delta F = \int_0^L \frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} \delta \underline{r}(s) ds + \text{Oberflächenenergie} \quad (7.4) \quad \left. \vphantom{\int_0^L} \right\} \text{Definition von } \frac{\delta F}{\delta \underline{r}}$$

Biegekraft: $-\frac{\delta F}{\delta \underline{r}}$ Funktionsabl. von F
 pro Längeneinh. (\underline{r})

Bestimmung $\delta F \stackrel{!}{=} k_B T \ell_p \int_0^L \frac{d\underline{r}}{ds} \delta \frac{d\underline{r}}{ds} ds$
 $= \int \frac{d\underline{r}^2}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2} \delta \underline{r}$

$\Rightarrow \delta F = k_B T \ell_p \int_0^L \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \left(\frac{d^2}{ds^2} \delta \underline{r} \right) ds$ 2. part. Int.!

Kettenregel: $\frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) - \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \frac{d}{ds} \delta \underline{r}$

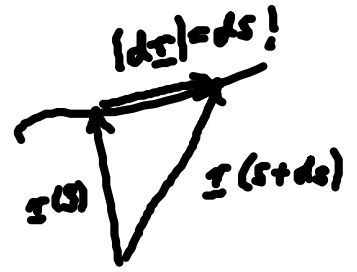
$\delta F = -k_B T \ell_p \int \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \left(\frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) ds + k_B T \ell_p \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds} \delta \underline{r} \Big|_0^L$
 $= \underline{k_B T \ell_p} \int \underline{\frac{d^4 \underline{r}}{ds^4}} \delta \underline{r} ds + \underline{k_B T \ell_p} \left[\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \left(\frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) - \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \cdot \delta \underline{r} \right] \Big|_0^L \quad (7.5)$
 Oberflächenenergie (s.u.)

Vgl. mit (7.4): $\frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} = k_B T \ell_p \frac{d^4 \underline{r}}{ds^4} \quad (7.6) \text{ Biegekraft}$

• Führe ein Spannungskräfte:

Dynamik $\underline{x}(s, t=0) \xrightarrow{\text{invariant Rotationspl.}} \underline{x}(s, t)$
 Undeflexibel: $L = \text{const.}$

$$\rightarrow \left| \frac{d\underline{x}}{ds} \right| = 1$$



→ Variation mit Nebenbedingung!

$$= F + F_s \int_0^L \lambda(s) \left(\frac{d\underline{x}}{ds} \right)^2 ds \quad (9.7)$$

Lagrangeparameter

Deutung: F_s : Dehnungsenergie, $\underline{T}(s) = \lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds}$: Spannung um $\left(\frac{d\underline{x}}{ds} \right)^2 = 1$ zu erfüllen

Variation

$$\delta F_s = \int \lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds} \delta \frac{d\underline{x}}{ds} ds = \int \left(\lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds} \right) \left(\frac{d}{ds} \delta \underline{x} \right) ds \quad \text{part. Int. !}$$

$$= - \int \frac{d}{ds} \left(\underbrace{\lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds}}_{\underline{T}(s)} \right) \delta \underline{x} ds + \left[\lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds} \delta \underline{x} \right] \Big|_0^L \quad (9.9)$$

Oberflächenform (9.9)

$$\rightarrow \frac{\delta F_s}{\delta \underline{x}} = - \frac{d}{ds} \underline{T}(s) \quad \text{Spannungskraft} \quad (9.10)$$

c) Elastohydrodynamik:

• Näherung: überströpte Bewegung (keine Tüpfel) „resistive force theory“

Kräfte GGL:

lokale Reibungskraft = Biege + Spannungskraft auf Filament

→ Bew.-Gl. für elastisches Filament in Flüssigkeit:

$$\left[S_{\parallel} \underline{\hat{t}} \otimes \underline{\hat{t}} + S_{\perp} \left(\underline{1} - \underline{\hat{t}} \otimes \underline{\hat{t}} \right) \right] \frac{d\underline{x}}{dt} = - \frac{\delta F}{\delta \underline{x}(s)} + \frac{d}{ds} \underline{T}(s) \quad (9.11)$$

„resistive force theory“ lokale Geschw.

$$= -k_B T \ell_p \frac{d^4 \underline{x}}{ds^4} + \frac{d}{ds} \left(\lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds} \right)$$

mit $S_{\parallel}, S_{\perp} \dots$ Reibungskoeff. pro Längereinheit \parallel, \perp zum Filamentzug.
 [s. Kap. 4.6]

NB (3.11) ist hochgradig nicht linear!

• freie Randbedingungen: $\rightarrow \delta \underline{x}|_0^L \in \delta \frac{d\underline{x}}{ds}|_0^L$ beliebig

mit Oberflächenterme in (3.5), (3.9):

$$\begin{array}{l} \delta \underline{x} \rightarrow \\ \delta \frac{d\underline{x}}{ds} \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} -k_0 T k_p \frac{d\underline{x}}{ds^3} + \lambda(s) \frac{d\underline{x}}{ds} = 0 \quad (3.12a) \\ \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = 0 \quad (3.12b) \end{array}}$$

... Filamentenden sind kraftfrei (a) und Drehmomentfrei (b)

d) Linearisierung um Grundzustand $\underline{x}_0(x) = x \underline{e}_x$, $x=0, \dots, L$



$$\underline{x}(x) = x \underline{e}_x + y(x) \underline{e}_y$$

gültig für $|y| \ll L$

keine Schleifen
„Monge-Darstellung“

(i) Tangentenvektor: $\frac{d\underline{x}}{dx} = \underline{e}_x + y' \underline{e}_y$, $\left| \frac{d\underline{x}}{dx} \right| = \sqrt{1 + (y')^2} = 1 + \sigma \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \underline{\hat{x}} = \underline{e}_x + \sigma \left(\frac{dy}{dx} \right) \underline{e}_y \\ \rightarrow \lambda(x) = 0 + \sigma \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \end{array} \right\} \underline{\tau} = \lambda \cdot \underline{\hat{x}} = 0$$

(ii) $\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d}{dt} y(x,t) \underline{e}_y + \underline{e}_x = \underline{\hat{t}}$ $\rightarrow \left(\underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{t}} \right) \frac{d\underline{x}}{dt} \sim (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x) \underline{e}_y$

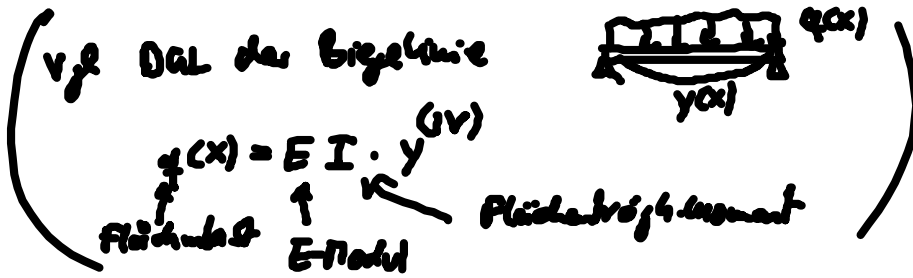
(iii) $\frac{d^4 \underline{x}}{dx^4} = \frac{d^4 y}{dx^4} \underline{e}_y \sim \underline{e}_x (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y) = 0$

(2.11) Linearisierung
(1) ... (11)

$$\boxed{S_{\perp} \frac{dy}{dt} = -k_{ST} l_p \frac{d^4 y}{dx^4}} \quad (2.12)$$

(2.12)

- Hyperdiffusionsgleichung



- Lösung: Ansatz $y(x,t) = y(x) \cdot e^{-i\omega t}$ & $y(0) = y_0$

$$\rightarrow iy(x) = S_{\perp}^4 \frac{dy}{dx^4} \quad (2.14)$$

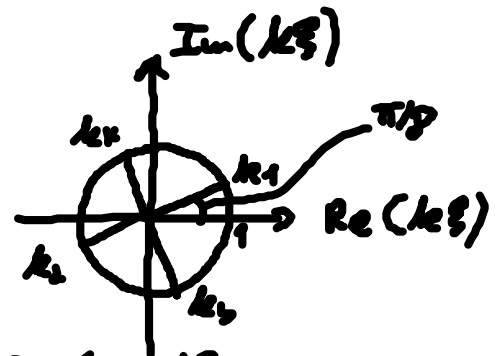
$$\text{mit } \xi = \left(\frac{k_{ST} l_p}{S_{\perp} \omega} \right)^{1/4} \quad (2.15) \text{ - Eindringtiefe}$$

(i) Lösung für $L \rightarrow \infty$: Ansatz: $y(x) = e^{ikx}$ in (2.14)

$$\rightarrow i = (k\xi)^4$$

$$\rightarrow k_{1/2} = \pm \frac{1}{\xi} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{c_1} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{c_2} \right)$$

$$k_{3/4} = \pm \frac{1}{\xi} (c_2 - ic_1)$$



Lösung mit $y(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ & $y''(0) = 0$ [c. (2.12b)]

$$\rightarrow y(x,t) = \frac{y_0}{2} \left[\underbrace{e^{-c_2 x/\xi}}_{\text{von } k_1} \underbrace{e^{i(c_1 x/\xi - \omega t)}}_{\text{Welle } \rightarrow} + \underbrace{e^{-c_1 x/\xi}}_{\text{von } k_3} \underbrace{e^{-i(c_2 x/\xi + \omega t)}}_{\text{Welle } \leftarrow} \right] \quad (2.16)$$

Dämpfung mit ξ

$\rightarrow \xi$: Eindringtiefe für Auslenkung eines Fiberrandes

(ii) endliches L: Restkurve $\bar{y} = \frac{y}{L}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{t} = \omega t$

führe ein: dimensionslose Größe:

$$S_p = \frac{L}{\xi} = \left(\frac{S_L \omega L^4}{k_B T l_p} \right)^{1/4} \sim \left(\frac{\text{Restungskraft}}{\text{Biegekraft}} \right)^{1/4} \quad (7.17)$$

$$(7.13) \rightarrow \boxed{\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = -S_p^{-4} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}^4}} \quad (7.18)$$

→ S_p bestimmt Verhalten des Filaments!

(1) $S_p \ll 1 \hat{=} L \ll \xi$... starrer Stab

(2) $S_p \approx 1 \hat{=} L \approx \xi$... „hydrodyn. Reibung bleibt gerannt. Stab“

(3) $S_p \gg 1 \hat{=} L \gg \xi$... „unendlich langer Stab“