

English Summary:

1.1. A short history of quantum mechanics

1800 M. Planck: black body radiation

Quantum hypothesis: energy exchange of quanta $E = h\nu$

1805 A. Einstein: photoelectric effect
 h Planck's constant, ν frequency

Photons as light quanta of energy $E = h\nu = \hbar\omega$

Compton: momentum $p = \hbar k$

1912/13 N. Bohr: atomic energy levels $E_n \sim -\frac{1}{n^2}$

follows from quantization condition $\oint p dq = n h$

1924 L. de Broglie: Materiewellen

Beliebigen (freie!) Teilchen wird durch eine Frequenz ω und durch eine Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (de Broglie-Wellenlänge) zugeordnet, in Analogie zum Licht

$$\begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{array}$$

Dispersionsbeziehung der de Broglie-Welle:

nichtrelativistisch

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

relativistisch

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$$

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad *$$

$$\omega(k) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} \quad ***$$

Sei v die Teilchengeschwindigkeit

$$p = m v$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad **$$

Phasengeschwindigkeit der de Broglie-Welle:

$$v_{ph} := \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v}{2} \quad *$$

\leftrightarrow

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} > c \quad **$$

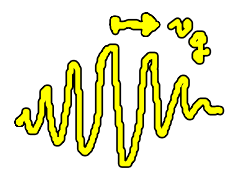
(NB: $v_{ph} = v = c$ für Photonen im Vakuum)

Gruppen geschwindigkeit

$$v_g := \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = v$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2 \hbar k}{2\sqrt{m^2 c^4 + \hbar^2 k^2}} = \frac{c^2 k}{\omega}$$

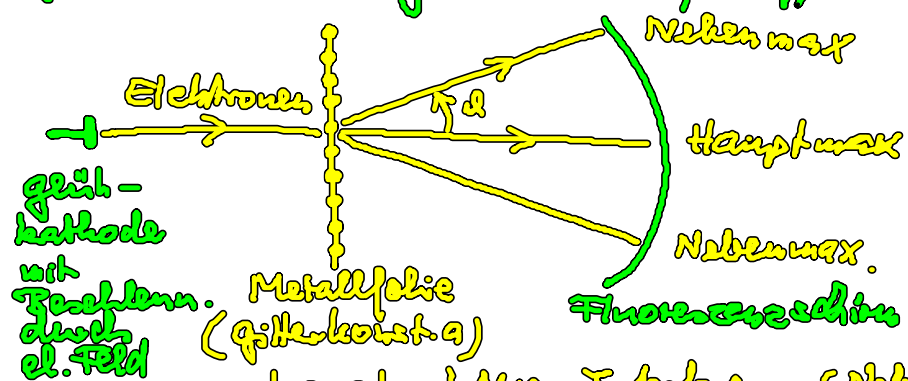
$$v_g = \frac{c^2}{v_{ph}} = v$$



Also Gruppengeschwindigkeit der deBroglie-Welle gleich Teilchengeschwindigkeit!

Experimenteller Nachweis:

Elektronenstrahlen zeigen Interferenz, also Welleneigenschaften
(Davisson und Germer 1927, Rupp 1928)



konstruktive Interferenz (Nebenmax.):
 $a \sin \alpha = n \lambda \quad n \in \mathbb{N}$

z.B. Elektronenwellen mit $\phi = 1000 \text{ V}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$

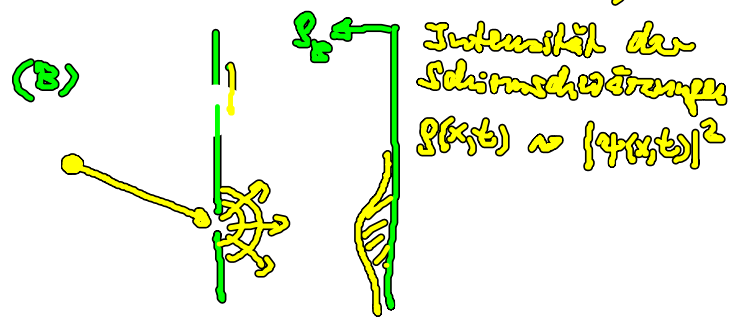
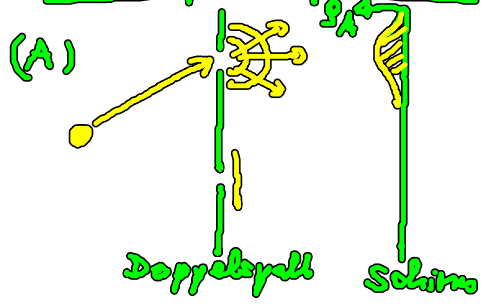
$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2me\phi}} \approx 0.04 \text{ nm} = 0.4 \text{ \AA} \Rightarrow \text{atomare Gitterkonst.}$$

$a \approx \lambda$

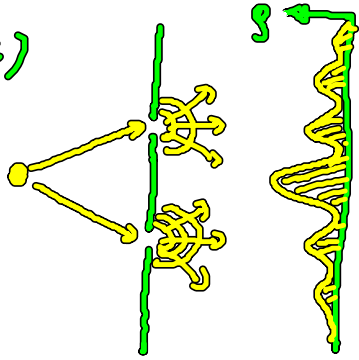
→ Elektronenmikroskop

→ atomare Kristallgitter
($a \approx 2 \dots 5 \text{ \AA}$)

Doppelspaltexperiment



(c)



NB: (i) Jedes Elektron verursacht einen lokalisierten Lichtblitz

⇒ $g(x,t)$ ist nicht Materiedichte, sondern die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen an Ort x zur Zeit t zu messen

$$g(x,t) \sim |\psi_A(x,t) + \psi_B(x,t)|^2$$

$$\neq g_A + g_B$$

(ii) Häufigkeitsverteilung des Auftreffens ergibt das Beugungsbild (nicht Interferenz gleichzeitig einfallender Elektronen)

Zusammenfassung: Welle-Teilchen-Dualismus
(ohne äußere Potentiale!)

	Wellen exp. z.B. Beugung	Teilchen exp. z.B. Photoeffekt Comptoneffekt } Steuerung
Licht	klass. ω, k $\omega = c k $	nicht klass. $E = \hbar\omega$ $p = \hbar k$ $E = cp$
Elektron	nicht klass. $\omega = E/\hbar$ $k = p/\hbar$ $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$	klass. E, p $E = \frac{p^2}{2m}$ (nichtrelativist.)

1925 E. Schrödinger : Wellen-Mechanik

Schrödingergl. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x) \psi$
 ≙ Wellengl. für Wellenfkt. $\psi(x,t)$

1925 W. Heisenberg : Matrizen-Mechanik

kanon. Vertauschungs-Relationen für kanon. Variable q (= Ort) und p (Impuls)

$$[p_k, q_l] = p_k q_l - q_l p_k = \frac{\hbar}{i} \delta_{kl}$$

Interpretation von p, q als unendlich-dimensionale Matrizen (in der heutigen Sprache: lineare Operatoren im Hilbertraum)

1.2 Der quantenmechanische Zustandsbegriff

klass. Mechanik beschreibt Einzelobjekte („Teilchen“, „Massenpunkte“)

In der Mikrophysik betrachtet man viele identische, ununterscheidbare Teilchen (z.B. Elektronenstrahl)

→ prinzipielle Ununterscheidbarkeit

(keine mikroskop. „Labels“, die z.B.

Hg-Atome im Grundzustand durch Nummerierung unterscheiden)

→ Teilchenbegriff versagt, stattdessen Beschreibung durch Zustand des physikalischen Systems (festgelegt durch die Gesamtheit aller messbaren Größen = Observablen)

Tieferer Grund: Wechselwirkung des Messprozesses mit den Mikroteilchen

→ Einbeziehung des Messprozesses in die Theorie

Definition des „Zustandes“ eines physikal. Objektes

(z.B. Atom) durch den Messprozess:

Sei eine Klasse von ununterscheidbaren Objekten durch bestimmte Messungen so beschrieben, dass man sie von allen anderen Klassen unterscheiden kann.

⇒ Die Objekte sind in dem durch diese Messung beschriebenen Zustand.

NB: qu. Zustandsvar. können diskret (quantisiert, z.B. Anregungsenergien eines Atoms) oder kontinuierlich (Energie eines freien Teilchens) sein.

Ziel der QM: Beschreibung von Zuständen und ihren Änderungen (Dynamik)

NB: Wellen- u. Matrizenmechanik sind spezielle Darstellungen dieser Theorie der Zustände und Observablen
(z.B. Energie E , Impuls p , Drehimpuls L)