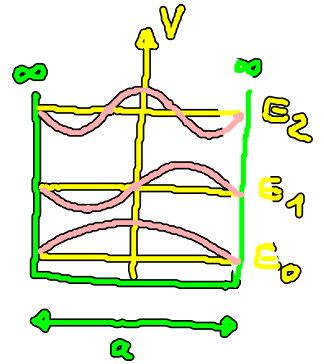


1.6 Stationary states in 1 dimension

$$\hat{H}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$



Potential well with infinite walls:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}, \quad k_n = \frac{(n+1)\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

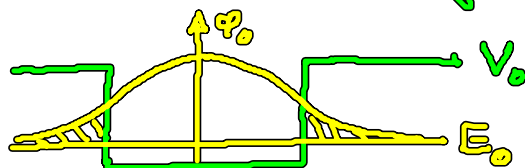
$$\varphi_{2n} \sim \cos(k_{2n}x), \quad \varphi_{2n+1} \sim \sin(k_{2n+1}x)$$

Potential well with finite walls: finite number of eigenstates

$E < V_0$ Pot. topf  $\varphi(x), \varphi'(x)$ stetig bei $\pm \frac{a}{2}$

Erg.: Es gibt endlich viele diskrete gebundene Zustände (Eigenzustände mit $E_n < V_0$). Mit aufsteigender Energie haben die Eigenfkt. ein abwechselnd gerade u. ungerader Parität; die n -te Eigenfkt. hat n Knoten.

Bem.: Die quantenmech. Wellenfkt. ist auch für $|x| > \frac{a}{2}$ ungleich Null, d. h. das Teilchen kann mit endl. Wahrscheinl. in den Bereich $E < V_0$ eindringen, der klassisch verboten ist.



Phys. Beispiel eines 1-dim. Potenzialtopfs

Quantentopf in Halbleitern
(Quantum Well)

Halbleiterschichtstruktur:

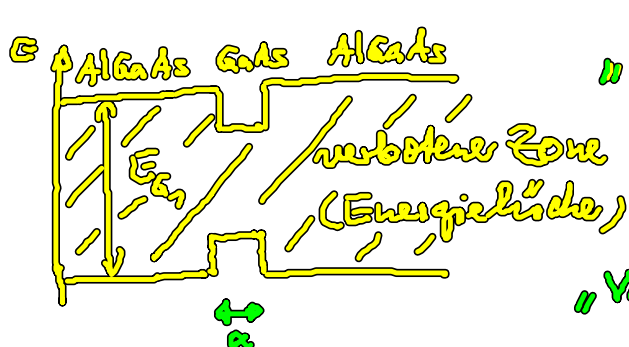


Physik-Nobelpreis 2000

H. Kroemer

Sh. Al'tsev

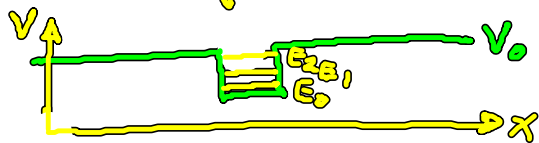
(HL-Heterostrukturen)



„Leitungsband“

„Valenzband“

Die Leitungselektronen bewegen sich im Quantentopf:



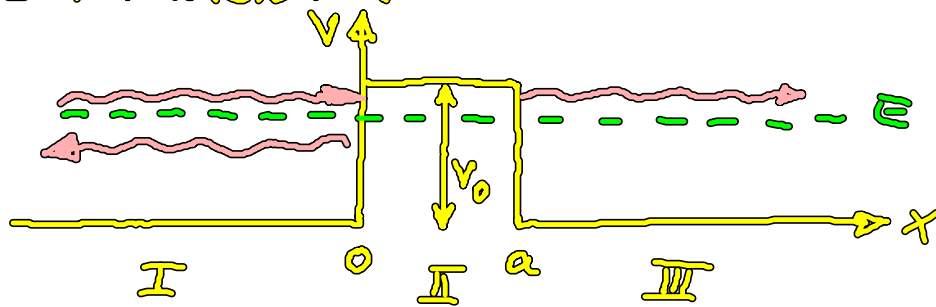
Quantisierte, gebundene Zustände, z.B. GaAs / $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$

($V_0 = 250 \text{ meV}$) mit $a = 10 \text{ nm}$: 3 gebundene Niveaus

Durch Variation des Legierungsverhältnisses x und der Schichtdicke lässt sich V_0 und a , und damit die Zahl und Lage der Energieniveaus einfach maßschneidern!

1.7 Tunneleffekt

Eindimensionale Potentialschleife :



Physical. Situation : Betrachte einen stationären Prozess, bei dem im Gebiet I von links eine Welle einläuft, teilweise nach links reflektiert wird, und im Gebiet III eine Welle nach rechts durchläuft :

$$I : \psi_I(x,t) = e^{i(kx - \omega t)} + r e^{i(-kx - \omega t)}$$

$$III : \psi_{III}(x,t) = t e^{i(kx - \omega t)}$$

$r =$ Reflexions - , $t =$ Transmissions - Amplitude

(Amplitude der einlaufenden Welle auf 1 normiert)

Schrodinger :

$$I, III : i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$$

Ansatz eingesetzt :

$$\boxed{\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E}$$

$$II : i\hbar \dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \right) \psi$$

Ansatz für $0 \leq E \leq V_0$:

$$\psi_{II}(x,t) = A e^{\gamma x - i\omega t} + B e^{-\gamma x - i\omega t}$$

$$\text{Also : } \hbar\omega = -\frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m} + V_0 = E \Rightarrow \boxed{\frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m} = V_0 - E \geq 0}$$

Mit $\varphi(x,t) = e^{-i\omega t} \varphi(x)$:

$$\text{I: } \varphi(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}$$
$$\varphi'(x) = ik(e^{ikx} - r e^{-ikx})$$

$$\text{II: } \varphi(x) = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}$$
$$\varphi'(x) = \gamma (A e^{\gamma x} - B e^{-\gamma x})$$

$$\text{III: } \varphi(x) = t e^{ikx}$$
$$\varphi'(x) = i k t e^{ikx}$$

Stetigkeitsbedingungen

$$x=0: 1+r = A+B \quad (a)$$

$$ik(1-r) = \gamma(A-B) \quad (b)$$

$$x=a: A e^{\gamma a} + B e^{-\gamma a} = t e^{ika} \quad (c)$$

$$\gamma(A e^{\gamma a} - B e^{-\gamma a}) = i k t e^{ika} \quad (d)$$

Ziel: Berechnung von t , also Elimin. von r, A, B :

$$(a) + \frac{(b)}{ik} \Rightarrow (1+r) + (1-r) = (A+B) - i\alpha(A-B) \quad \alpha := \frac{\gamma}{k}$$
$$2 = A(1-i\alpha) + B(1+i\alpha) \quad (e)$$

$$(c) + \frac{(d)}{\gamma} \Rightarrow 2 A e^{\gamma a} = \left(1 + \frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika}$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika} e^{-\gamma a}$$

$$(c) - \frac{(d)}{\gamma} \Rightarrow 2 B e^{-\gamma a} = \left(1 - \frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika}$$
$$B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika} e^{\gamma a}$$

A, B eingesetzt in (e):

$$2 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{i}{\alpha}\right) (1-i\alpha) e^{-\gamma a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{i}{\alpha}\right) (1+i\alpha) e^{\gamma a} \right] t e^{ika}$$
$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2 + i(\frac{1}{\alpha} - \alpha)} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2 - i(\frac{1}{\alpha} - \alpha)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 e^{-ika}}{[2 + i(\frac{1}{\alpha} - \alpha)] e^{-\gamma a} + [2 - i(\frac{1}{\alpha} - \alpha)] e^{\gamma a}}$$

$$= \frac{4e^{-ika}}{4 \cosh(\gamma a) - 2i\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right) \sinh(\gamma a)}$$

Transmissionsvermögen

Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$

- einfallend: $\psi_e = e^{i(kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow j_e = \frac{\hbar}{2im} \left(ik\psi_e^* \psi_e + ik\psi_e \psi_e^* \right) = \frac{\hbar k}{m}$$

- transmittiert: $\psi_t = te^{i(kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow j_t = \frac{\hbar k}{m} |t|^2$$

- reflektiert: $\psi_r = re^{i(-kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow j_r = -\frac{\hbar k}{m} |r|^2$$

Transmissionsvermögen: $T := \frac{|j_t|}{|j_e|} = |t|^2$

Reflexionsvermögen: $R := \frac{|j_r|}{|j_e|} = |r|^2$

$$\begin{aligned} \text{Also } T = |t|^2 &= \frac{16}{\left[4 \cosh(\gamma a) - 2i\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right) \sinh(\gamma a)\right] \left[4 \cosh(\gamma a) + 2i\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right) \sinh(\gamma a)\right]} \\ &= \frac{16}{\underbrace{16 \cosh^2(\gamma a)}_{1 + \sinh^2(\gamma a)} + 4\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)^2 \sinh^2(\gamma a)} \\ &= \left[1 + \frac{4\alpha^2 + (1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2} \sinh^2(\gamma a)\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\right)^2 \sinh^2(\gamma a)} \end{aligned}$$

$$\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{k^2} = \frac{V_0 - E}{E}, \quad 1 + \alpha^2 = \frac{V_0}{E}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)} a}{\hbar} \right)}$$

$$0 \leq \frac{E}{V_0} < 1$$

Im Falle der Stationarität folgt aus der Kontinuitätsgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x} j = 0 \quad \Rightarrow \quad j(x) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow j_e + j_r = j_t \quad \Rightarrow \quad 1 - |r|^2 = |t|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{R + T = 1}$$

Quantenmechan. Tunneleffekt:

$$T > 0 \quad \text{für} \quad 0 < E \leq V_0$$

(Klass. Teilchen mit Energie $E < V_0$ können die Potenzialbarriere V_0 nicht überwinden und werden vollständig reflektiert: $T = 0$)

Kein klassisches Analogon!