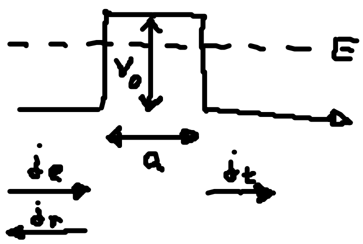
English Summary:

1.7 Tunnel effect

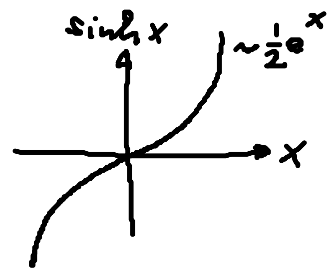


transmission probability $T = \frac{|j_t|}{|j_e|} = |t|^2$

reflection probability $R = \frac{|j_r|}{|j_e|} = |r|^2 = 1 - T$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}\, a}{\hbar}\right)}$$

Diskussion:



(i) $\frac{E}{V_0} \ll 1$: $\underline{T \to 0}$ für $E \to 0$

(Energie klein gegen Potenzialbarriere)

(ii) $\underbrace{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}_{\varkappa} a \gg 1$: $\underline{T \to 0}$ für $\varkappa a \to \infty$

$$T \sim \exp\left(-2\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} a\right) \qquad \text{für } \varkappa a \gg 1$$

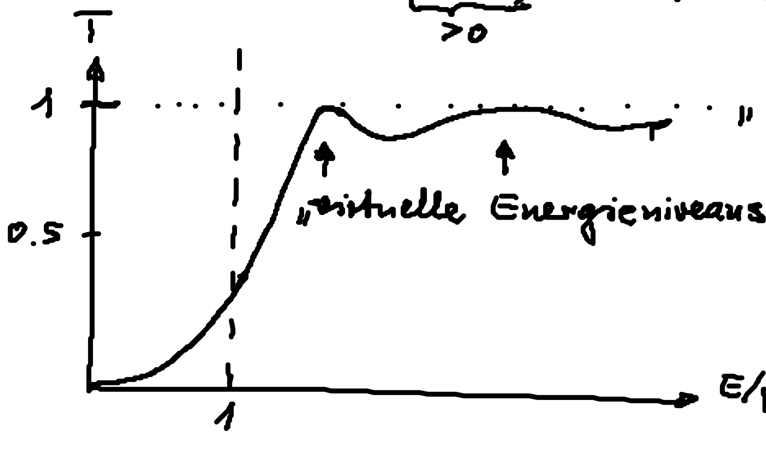
(Breite der Potenzialbarriere a groß gegen DeBroglie-Wellenlänge $\frac{2\pi}{\varkappa}$ eines Teilchens der Energie $V_0 - E$: <u>klass. Grenzfall</u>)

(iii) $E > V_0$: $\varkappa = i\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$

analyt. Fortsetzung mit $\sinh(\gamma a) = \sinh(i\varkappa a) = i \sin(\varkappa a)$

$$\sinh(\gamma a) = \frac{e^{\gamma a} - e^{-\gamma a}}{2}$$

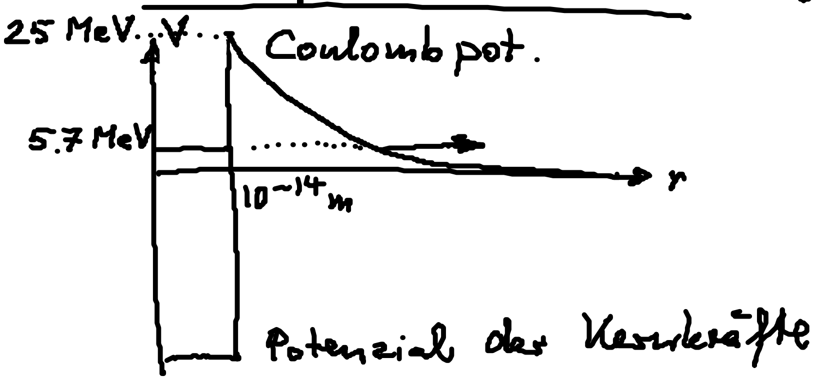
$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E\underbrace{(E-V_0)}_{>0}} \sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}\,a}{\hbar}\right)} \qquad \frac{E}{V_0} > 1$$



„Streuresonanzen" ($T=1$) für $\varkappa a = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$,
sonst $T < 1$
(im Gegensatz zum klass. Fall!)

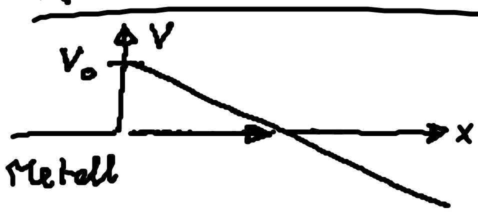
Beispiele für den Tunneleffekt

(i) α-Zerfall von Radium: ${}^{224}_{88}Ra \longrightarrow {}^{220}_{86}Rn + \alpha$



Die aus dem Radiumkern austretenden α-Teilchen haben Energie $E = 5.7$ MeV $\ll V_0 = 25$ MeV

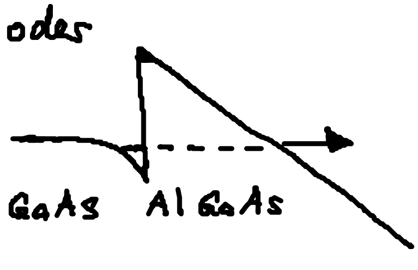
(ii) Kalte Feldemission



Austritt von Elektronen aus einem Metall, an das ein starkes el. Feld $\mathcal{E}$ angelegt ist:

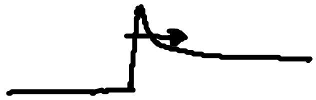
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad (\text{Metall}) \\ V_0 - e\mathcal{E}x & x \geq 0 \quad (\text{außen}) \end{cases}$$

oder



Halbleiterheterostruktur, im starken elektrischen Feld

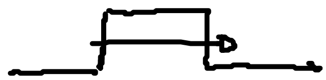
oder



Metall Halbleiter

Metall – Halbleiter (Schottky-) Kontakt
(Bandverbiegung durch Raumladungsfeld)

oder



S N S

Supraleiter – Dielektrikum – Supraleiter
(Josephson-) Kontakt

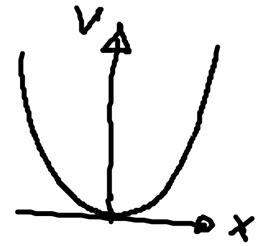
1.8 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

<u>gesucht</u>:
Stationäre Zustände im Potenzial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (k>0)$

<u>Klass. Lösung</u>: $x(t) = b\cos(\omega t + \alpha)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Energie $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}\omega^2 b^2$

(alle Energien $E > 0$ erlaubt)



<u>Schrödinger-Gl.</u>

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\varphi'' = \left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\varphi$$

Asymptotisches Verhalten für $|x| \to \infty$:

$$\varphi''(x) \sim x^2\varphi(x)$$

Ansatz $\varphi(x) = e^{-\beta x^2} f(x)$

$$\varphi'(x) = -2\beta x e^{-\beta x^2} f + e^{-\beta x^2} f'$$

$$\varphi''(x) = (4\beta^2 x^2 - 2\beta)e^{-\beta x^2} f - 4\beta x e^{-\beta x^2} f' + e^{-\beta x^2} f''$$

Schrödingergl.

$$\Rightarrow \left[(4\underline{\beta^2 x^2} - 2\beta)f - 4\beta x f' + f''\right]e^{-\beta x^2} = \left(\underline{\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)e^{-\beta x^2} f$$

<u>führende Terme</u> für $|x| \to \infty$: $4\beta^2 = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}$

$$\beta = (\pm) \frac{m\omega}{2\hbar}$$ (− Zeichen führt zu divergierenden, nicht normierbaren Lösungen)

Mit $\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$ folgt:

$$\left[f'' - 4\beta x f' + \left(\frac{2m}{\hbar^2}E - 2\beta\right) f \right] = 0$$

<u>Potenzreihenansatz</u>

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu x^\mu$$

$$f'(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \mu x^{\mu-1}$$

$$f''(x) = \sum_{\mu=\cancel{0}\,2}^{\infty} c_\mu \mu(\mu-1) x^{\overbrace{\mu-2}^{\tilde\mu}} = \sum_{\tilde\mu=0}^{\infty} c_{\tilde\mu+2}(\tilde\mu+2)(\tilde\mu+1) x^{\tilde\mu}$$

Einsetzen in Dgl.:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[c_{\mu+2}(\mu+2)(\mu+1) - c_\mu \left(4\beta\mu + 2\beta - \frac{2m}{\hbar^2}E\right) \right] x^\mu = 0$$

Koeffizientenvergleich von x^μ:

$$c_{\mu+2} = c_\mu \frac{2\beta(2\mu+1) - \frac{2m}{\hbar^2}E}{(\mu+2)(\mu+1)}$$

Diese Rekursionsformel verknüpft getrennt alle geraden ($\mu = 0, 2, 4, \dots$) und alle ungeraden ($\mu = 1, 3, 5, \dots$) Potenzen. (Grund: symm. Pot. $V(x) = V(-x)$.)

Falls die Potenzreihe nicht abbricht, gilt für $\mu \to \infty$:

$$\frac{c_{\mu+2}}{c_\mu} \to \frac{4\beta\cancel{\mu}}{\mu^{\cancel{2}}} = \frac{2\beta}{\left(\frac{\mu}{2}\right)}$$

Für $|x| \to \infty$ kommt der Hauptbeitrag zur Potenzreihe von Potenzen mit großem μ, also kann man <u>asymptotisch</u> abschätzen mit $\mu = 2k$, $c_{2k} \sim \frac{(2\beta)^k}{k!} c_0$:

(für große k)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (x^2)^k \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\beta x^2)^k}{k!} = \exp(2\beta x^2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = e^{-\beta x^2} f(x) \sim e^{\beta x^2}$$ <u>nicht normierbar!</u>

Also muss für <u>normierbares</u> φ die Potenzreihe abbrechen: $\boxed{c_{n+2} = 0}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $c_n \neq 0$

$$\Rightarrow \quad 2\beta(2n+1) - \frac{2m}{\hbar^2} E \overset{!}{=} 0 \qquad 2\beta = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Energie-Eigenwerte des harmon. Oszillators

<u>Nullpunktsenergie</u>: $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega > 0$

$E = 0$ ist nicht möglich wegen der Unschärfe-Relation.