

English Summary:

4.5 Identical particles: Spin and statistics

N -particle Schrödinger eq. $\hat{H} |a_1, a_2, \dots, a_N\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a_1, a_2, \dots, a_N\rangle$
microscopic particles with same quantum numbers are indistinguishable

Permutation op. $\hat{P}_{(ij)} \rightarrow$ conserved

$\hat{P}_{(ij)} \psi = \lambda_{ij} \psi \Rightarrow \lambda_{ij} = \pm 1$
Symmetric: bosons ($s=0, 1, \dots$)
Antisymmetric: fermions ($s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$)

antisymmetrization op. $\hat{A} := \frac{1}{N!} \sum_{\rho=1}^{N!} (-1)^\rho \hat{P}_{(\rho)}$ $\hat{A}^2 = \hat{A}, \hat{A} = \hat{A}^\dagger$

symmetrization op. $\hat{S} := \frac{1}{N!} \sum_{\rho=1}^{N!} \hat{P}_{(\rho)}$ $\hat{S}^2 = \hat{S}, \hat{S} = \hat{S}^\dagger$
Projectors

5. Näherungsmethoden

5.1 Zeitabhängige Störungsrechnung (Dirac)

Es soll die zeitliche Entwicklung eines Zustandes $|\psi\rangle_t$ aus der Schrödingergl.

$$\hat{H} |\psi\rangle_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_t$$

berechnet werden, wobei

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1(t)$$

Störung $\hat{H}^1 = \epsilon \hat{V}$ (est. explizit zeitabh.!)
mit kleinem Parameter ϵ

Eigenwerte und -zustände von \hat{H}^0 seien bekannt:

$$\boxed{\hat{H}^0 |n\rangle = E_n |n\rangle}$$

ungestörtes Problem

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

(Annahme: diskretes Spektrum)

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$$

Entwicklung von $|\psi\rangle_t$ nach den ungestörten Eigenzuständen $|n\rangle$:

$$|\psi\rangle_t = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n | \psi \rangle_t}_{c_n(t)} = \sum_n c_n(t) |n\rangle$$

Anfangsbed. sei ein ungestörter Eigenzustand $|n_0\rangle$:

$$|\psi\rangle_{t=0} = |n_0\rangle \Rightarrow c_n(0) = \delta_{nn_0}$$

Zeitentwicklung unter dem Einfluss der Störung:

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n}{dt} |n\rangle = \sum_n c_n(t) \left(\underbrace{\hat{H}^0 |n\rangle}_{E_n |n\rangle} + \hat{H}^1(t) |n\rangle \right)$$

Links multiplikation mit $\langle m|$:

$$i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + \sum_n \langle m | \hat{H}^1 | n \rangle c_n(t) \quad (*)$$

Definiere $g_n(t)$ durch $c_n(t) = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} g_n(t)$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + e^{-i \frac{E_m t}{\hbar}} i\hbar \frac{dg_m}{dt}$$

zeitentw. der ungestörten Zustände von (*) für $\hat{H}^1 = 0$

eingesetzt in (*):

$$i\hbar \frac{dg_m}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}\right\} \langle m | \hat{H}' | n \rangle g_n(t)$$

Störungsentwicklung für kleines ε mit $\hat{H}' = \varepsilon \hat{V}$:

$$g_n(t) = g_n^{(0)}(t) + \varepsilon g_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 g_n^{(2)}(t) + \dots$$

Koeffizientenvergleich in Ordnung ε^v :

$$v=0: i\hbar \frac{dg_m^{(0)}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow g_m^{(0)}(t) = \text{const.} = \delta_{mn_0} \quad \left(\text{exakte Lösung für } \varepsilon=0: \right. \\ \left. c_m(t) = e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} \delta_{mn_0} \right)$$

$$v=1: i\hbar \frac{dg_m^{(1)}}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}\right\} \langle m | \hat{V} | n \rangle \underbrace{g_n^{(0)}}_{\delta_{nn_0}} \\ = \exp\left\{\frac{i(E_m - E_{n_0})t}{\hbar}\right\} \langle m | \hat{V} | n_0 \rangle$$

$$\text{Auf. bed. } g_n^{(1)}(0) = 0$$

$$\Rightarrow g_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left\{\frac{i(E_m - E_{n_0})\tau}{\hbar}\right\} \langle m | \hat{V} | n_0 \rangle$$

Übergangswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t den Zustand $|n\rangle$ zu finden, wenn für $t=0$ $|n_0\rangle$ vorliegt:

$$P_{n n_0} = |\langle n | \psi_t \rangle|^2 = \left| \sum_{n'} c_{n'}(t) \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}} \right|^2 = |c_n(t)|^2 = |g_n(t)|^2$$

Näherung: niedrigste, nichtverschwindende Ordnung

$$g_n(t) = \begin{cases} g_n^{(0)} = \delta_{nn_0} = 1 & \text{für } n = n_0 \\ \varepsilon g_n^{(1)} & \text{für } n \neq n_0 \end{cases}$$

(a) Zeitunabhängige Störung : $\hat{V} = \text{const.}$

$$g_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0})t'}{\hbar}\right\} \langle n | \hat{V} | n_0 \rangle$$

$$= -\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle \frac{\exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0})t}{\hbar}\right\} - 1}{E_n - E_{n_0}}$$

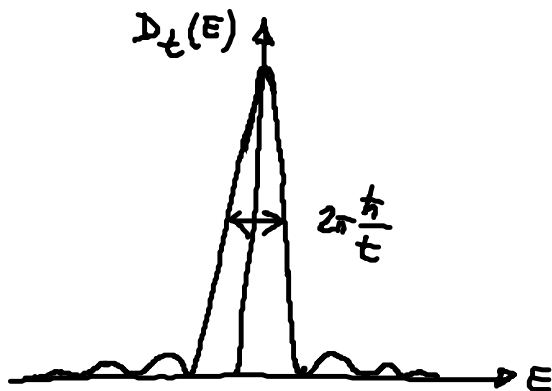
$$|g_n^{(1)}(t)|^2 = |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 \frac{(e^{-i\Omega t} - 1)(e^{i\Omega t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

mit $\Omega := \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$ Übergangsfrequenz

$$= |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 \frac{2(1 - \cos \Omega t)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

$$= |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 \frac{4 \sin^2\left(\frac{\Omega}{2} t\right)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

$$=: D_t(E_n - E_{n_0})$$



$$D_t(0) = \left(\frac{t}{\hbar}\right)^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE D_t(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{4}{E^2} \sin^2\left(\frac{Et}{2\hbar}\right) = \frac{2t}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$$

$$\text{Also } D_t(E) =: \frac{2\pi}{\hbar} t \delta_t(E) \rightarrow \frac{2\pi}{\hbar} t \delta(E) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle_t|^2 = |g_n(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 t \delta_t(E_n - E_{n_0})$$

Für $t \rightarrow \infty$: Energieerhaltung $E_n - E_{n_0} = 0$

Für $t < \infty$ hat $D_t(E)$ die Breite $\Delta E \approx \frac{2\pi\hbar}{t}$

⇒ Energie-Zeit-Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \approx 2\pi\hbar$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit : Rate
(von n_0 nach n)

$$W_{nn_0} = \frac{d}{dt} |\langle n| \psi_t \rangle|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n| \hat{H}' | n_0 \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n_0})$$

(Fermi's Goldene Regel, Störungstheorie 1. Ordnung)
für $t \rightarrow \infty$

(b) Harmonische zeitabhängige Störung

$$\hat{H}'(t) = \hat{F} e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{hermitesch!})$$

$$g_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \exp\left\{ \frac{i(E_n - E_{n_0} - t'\omega)t'}{\hbar} \right\} \langle n | \hat{F} | n_0 \rangle \\ - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \exp\left\{ \frac{i(E_n - E_{n_0} + t'\omega)t'}{\hbar} \right\} \langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle$$

$$= -\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle \frac{\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n_0} - t\omega)t \right\} - 1}{E_n - E_{n_0} - t\omega} \\ - \langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle \frac{\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n_0} + t\omega)t \right\} - 1}{E_n - E_{n_0} + t\omega}$$

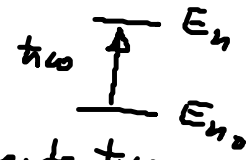
$$|\langle n | \psi_t \rangle|^2 = |g_n|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle|^2 t \delta(E_n - E_{n_0} - t\omega)$$

$$+ \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{F}^+ | n_0 \rangle|^2 t \delta(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)$$

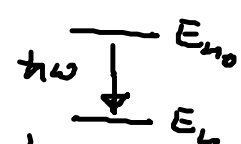
$$= \frac{4A \cos(\omega t - \gamma)}{\hbar^2 \Omega^+ \Omega^-} [\cos \omega t - \cos \Omega t] \left\{ \begin{array}{l} + \underbrace{\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle^* \langle n | \hat{F}^+ | n_0 \rangle}_{A e^{-i\Omega^- t}} \frac{(e^{-i\Omega^- t} - 1)(e^{i\Omega^+ t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^- \Omega^+} \\ + \underbrace{\langle n | \hat{F}^+ | n_0 \rangle^* \langle n | \hat{F} | n_0 \rangle}_{A e^{i\Omega^+ t}} \frac{(e^{-i\Omega^+ t} - 1)(e^{i\Omega^- t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^- \Omega^+} \end{array} \right.$$

Oszillierende Terme für $\omega \neq 0, \Omega \neq 0$, für $t \rightarrow \infty$ vernachlässigbar gegen $\sim t \delta(\hbar\Omega^\pm)$ mit $\Omega^\pm := \Omega \pm \omega = \frac{E_n - E_{n_0} \pm \hbar\omega}{\hbar}$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit für $t \rightarrow \infty$ von n_0 nach n :

$$W_{n n_0} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)$$


Absorption eines Quants $\hbar\omega$

$$+ \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n_0 | \hat{F} | n \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)$$


stimulierte Emission eines Quants $\hbar\omega$