

I. Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

I.1. Binomialverteilung, Begriffe

betrachte Münzwurf:

Kopf oben mit Wahsch. W p_1
Zahl oben " " " p_2

es gilt: $p_1 + p_2 = 1$

mache N Würfe wobei N_1 : Zahl der Würfe mit Ergebnis "Kopf oben"

$N_2 = N - N_1$: Zahl der Würfe mit Ergebnis "Zahl oben"

es gilt: $p_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N}$, $p_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_2}{N}$

• Wahrsch., 2 x hintereinander "Kopf nach oben" zu erhalten

p_1^2 (falls Würfe statistisch unabhängig)

• Wahrsch., hintereinander Kopf und Zahl oben zu werfen.

$p_1 \cdot p_2$

Mehr Würfe ($N > 2$).

Wahrsch., N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" zu werfen. (in einer bestimmten Sequenz)

$$P_1^{N_1} P_2^{N_2}$$

beachte:

ES gibt viele Möglichkeiten, N Würfe so durchzuführen, dass N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" erscheint!

$$\text{Anzahl dieser Möglichkeiten: } \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

Begründung:

$N!$: Zahl der Möglichkeiten, N Ereignisse auf die mögl. Ergebnisse zu verteilen (Permutationen)

Division durch $N_1! N_2!$, da die Ereignisse "Kopf oben" bzw. "Zahl oben" untereinander ununterscheidbar sind!

\Rightarrow Wahrsch., N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" unabhängig von der Reihenfolge zu werfen

$$W_N(N_1) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

$$N_2 = N - N_1$$

"Binomialverteilung"

Beispiel für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung
(N_1 ist diskrete Variable)

Name rührt aus dem Binomialsatz

$$(p_1 + p_2)^N = \sum_{N_1=0}^N \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}$$

für allg. p_1, p_2

Binomialsatz

(also nicht notwendigerweise
 $p_1 + p_2 = 1$)

beachte:

$$\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1! (N - N_1)!}$$

$$= \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

⇒ Der Summand entspricht
gerade der Verteilung $W_N(N_1)$
falls $p_1 + p_2 = 1$!

Setze nun im Binomialsatz

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$\rightarrow 1^N = \boxed{1 = \sum_{N_1=0}^N W_N(N_1)} \quad |$$

Die Binomialverteilung ist also
normiert!

Berechne nun den Mittelwert von N_1

$$\langle N_1 \rangle = \frac{\sum_{N_1=0}^N W_N(N_1) N_1}{\sum_{N_1=0}^N W_N(N_1)} = \sum_{N_1=0}^N W_N(N_1) N_1$$

setze Ausdruck für $W_N(N_1)$ ein

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} N_1$$

Trick: Tasse verübergelend p_1, p_2 als unabhängige Variable auf
 und benutzt: $N_1 p_1^{N_1} = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1^{N_1})$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} \left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1^{N_1}) \right) p_2^{N_2}$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \right) = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 + p_2)^N$$

Binomialatz

$$= p_1 N (p_1 + p_2)^{N-1}$$

$$\stackrel{p_1 + p_2 = 1}{=} p_1 N \frac{1^{N-1}}{1} = p_1 N$$

$p_1 + p_2 = 1$

Schwankungen

Definition:

$$\Delta N_1 = N_1 - \langle N_1 \rangle \quad \text{Abweichung vom Mittelwert}$$

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \langle N_1 \rangle - \underbrace{\langle N_1 \rangle}_{\langle N_1 \rangle} = 0$$

als Maß für die Abweichung vom Mittelwert benutzt man

$$\overline{\Delta N_1} = \sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}$$

mittlere Schwankung
(mittlere quadratische Schwankung)

beachte:

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \rangle$$

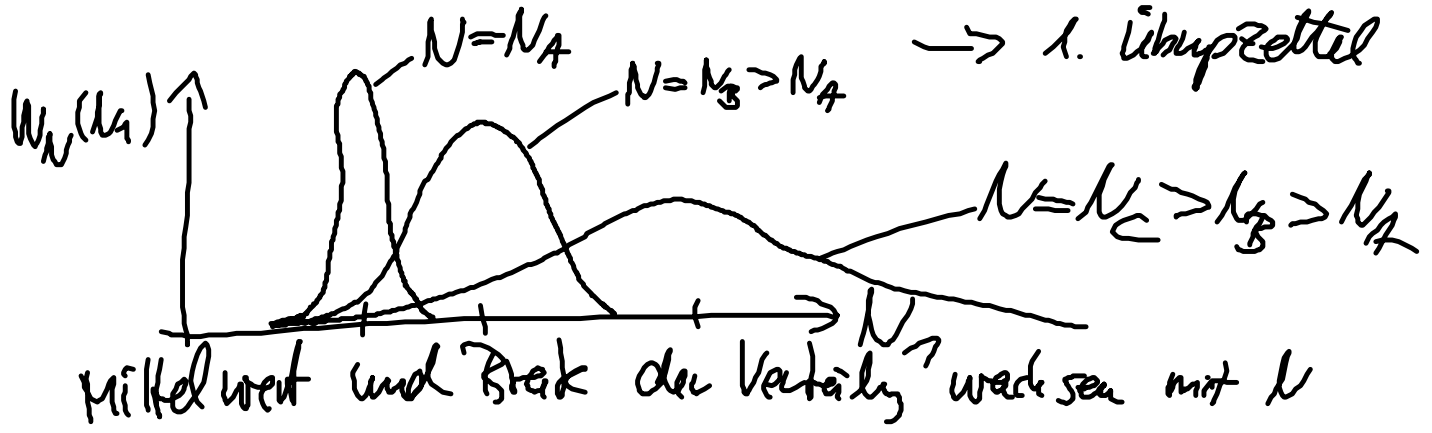
(Schreibweise zeigt, dass $\langle (\Delta N_1)^2 \rangle$ immer positiv ist)

$$= \langle N_1^2 \rangle - \underbrace{\langle N_1 \langle N_1 \rangle \rangle}_{\langle N_1 \rangle^2} - \underbrace{\langle \langle N_1 \rangle N_1 \rangle}_{\langle N_1 \rangle^2} + \langle N_1 \rangle^2$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2$$

Speziell für die Binomialverteilung findet man

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2 = N p_1 (1 - p_1)$$



Alternativen zur direkten Auswertung
von Mittelwerten und Schwankungen

⇒ Charakteristische Funktionen

allg. gegeben, sei eine diskrete Zufallsvariable x_ℓ
mit Wahrsch. $w(x_\ell)$ normierter

die finiere

$$f(k) = \langle e^{ikx} \rangle$$

$$= \sum_{\ell=1}^M e^{ikx_\ell} w(x_\ell)$$

charakterist. Funktion

In die sogenannte Momente der Verteilung gilt:

$$\langle X^n \rangle = (-i)^n \left. \frac{d^n f}{dk^n} \right|_{k=0} \quad (*)$$

"n-tes Moment"

z.B. $n=1$

rechne Sie von (*)

$$\begin{aligned} (-i) \left. \frac{df}{dk} \right|_{k=0} &= \left(\sum_{l=1}^N e^{ikx_l} \cdot ix_l \cdot (-i) W(x_l) \right) \Big|_{k=0} \\ &= \langle e^{ikx} x \rangle_{k=0} = \langle x \rangle_{\text{o.k.}} \end{aligned}$$

Daraus folgt auch

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dk^n} \right|_{k=0} \quad \text{Taylorentwicklung}$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle$$

\Rightarrow Möglichkeit, die volle charakteristische Funktion zu berechnen, falls alle Momente existieren und bekannt sind

Illustration: Binomialverteilung:

$$f(k) = \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \underbrace{(e^{ik})^{N_1}}_{e^{ikN_1}}$$

$$= \sum_{N_1=0}^N \frac{N!}{N_1! N_2!} (p_1 e^{ik})^{N_1} p_2^{N_2}$$

$$\Rightarrow (p_1 e^{ik} + p_2)^N$$

Binomialatz

$$\langle N_1 \rangle = (-i) \frac{df}{dk} \Big|_{k=0} \left[(-i) N (p_1 e^{ik} + p_2)^{N-1} \cdot ip_1 e^{ik} \right]_{k=0}$$

$$= \underbrace{(-i)^2}_1 N (p_1 + p_2)^{N-1} p_1$$

$$= p_1 N \quad \checkmark$$

\uparrow
 $p_1 + p_2 = 1$

I. 2. Von der Binomialverteilung zur Gaußverteilung

Erinnerung: Für die Binomialverteilung ist $\langle N_1 \rangle = N p_1$
 $\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$

Betrachte nun die relative Schwankung

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} = \frac{\langle \overline{\Delta N_1} \rangle}{\langle N_1 \rangle}$$

speziell spezielle Binomialverteilung:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} = \frac{\sqrt{N p_1 p_2}}{N p_1} = \sqrt{\frac{N p_1 p_2}{N^2 p_1^2}} \\ = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \sqrt{\frac{1}{N}}$$

Für die Binomialverteilung verschwindet
die relative Schwankung
im Limes $N \rightarrow \infty$!!

gilt auch allgemein

"Gesetz der großen Zahlen"

Für sehr große N wird die Binomialverteilung
zu einer schief lokalisierten Verteilung um den
Mittelwert $\langle N_1 \rangle$!!

Ziel gesetzt:

Funktional: Form der Binomialverteilung
für große N

Vorgehen:

Taylorentwicklung der Funktion $W_N(k_1)$ um
das Maximum

genauer:

Wir entwickeln nicht $W_N(k_1)$ an sich, sondern
den Logarithmus $\ln W_N(k_1)$ (um den Wert
 $\langle k_1 \rangle$ herum)

„Begründung“

Betrachte Funktion $f(n) = p^n = e^{n \ln p}$

entwickle um $n = \bar{n}$

↖ Mittelwert

→ Taylor von $f(n)$ um $n = \bar{n}$

$$f(n) \approx f(\bar{n}) + f'(\bar{n})(n - \bar{n}) + \sigma (n - \bar{n})^2$$

$$= p^{\bar{n}} + \ln p \underbrace{p^{\bar{n}} (n - \bar{n})}_{\substack{\text{ist für sehr große } n \\ \text{wieder sehr groß}}} + \dots$$

→ Schlechte Näherung!

2) Taylor-Entwicklung des Logarithmus

$$\ln f(n) = n \ln p$$

$$\approx \bar{n} \ln p + \ln p (n - \bar{n})$$

Keine höheren
Terme!
Koeffizient endlich

Entwickle nun also $\ln W_N(N_1)$ bezgl. N_1
 $\ln \langle N_1 \rangle = N p_1$ (halte N und p_1 fest)

Startpunkt:

$$\ln W_N(N_1) = \ln \left(\frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \right)$$

$$\ln W_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! \\ + N_1 \ln p_1 + N_2 \ln p_2$$

benötige Ableitung bezgl. N_1 !

benutzt: $N_2 = N - N_1$

z.B.

$$\frac{d \ln N_1!}{dN_1} \approx \frac{\ln(N_1+1)! - \ln N_1!}{1} = \ln \frac{(N_1+1)!}{N_1!}$$

$$= \ln(N_1+1)$$

Annäherung durch Differenzenquotient

$N_1 \gg 1 \Rightarrow \ln(N_1+1) \approx \ln N_1$!!

(alternativ: Stirling-Formel

$$\ln N_1! \approx N_1 \ln N_1 - N_1$$

$$\frac{d \ln N_1!}{dN_1} \approx \ln N_1 + \frac{N_1}{N_1} - 1 = \ln N_1$$

analog:

$$\frac{d \ln N_2!}{dN_1} = \frac{d \ln(N - N_1)!}{dN_1}$$

$$= \dots = -\ln(N - N_1)$$

Insgesamt:

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} = -\ln N_1 + \ln(N - N_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

betrachte das an der Stelle des Mittelwerts

$$\langle N_1 \rangle = N p_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} \Big|_{N_1 = \langle N_1 \rangle} &= -\ln N p_1 + \ln \overbrace{(N - N p_1)}^{N(1-p_1)} \\ &\quad + \ln p_1 - \ln(1-p_1) \\ &= -\cancel{\ln N p_1} + \ln N + \cancel{\ln(1-p_1)} \\ &\quad + \cancel{\ln p_1} - \cancel{\ln(1-p_1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das Verschwinden des Terms
ist konsistent mit der Tatsache,
dass wir um ein Extremum
entwickeln!