I. Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

I.1. Binomialverteilung, Begriffe

betrachte Münzwurf:

Kopf oben mit Wahrsch. W p_1
Zahl oben " " " p_2

es gilt: $p_1 + p_2 = 1$

mache N Würfe wobei N_1: Zahl der Würfe mit Ergebnis "Kopf oben"

$N_2 = N - N_1$: Zahl der Würfe mit Ergebnis "Zahl oben"

es gilt: $p_1 = \lim_{N \to \infty} \frac{N_1}{N}$, $p_2 = \lim_{N \to \infty} \frac{N_2}{N}$

- Wahrsch., 2× hintereinander "Kopf nach oben" zu erhalten

$$p_1^2$$ (falls Würfe statistisch unabhängig)

- Wahrsch., hintereinander Kopf und Zahl oben zu werfen.

$$p_1 \cdot p_2$$

Mehr Würfe ($N>2$):

Wahrsch., N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" zu werfen. (in einer bestimmten Sequenz)

$$p_1^{N_1} \, p_2^{N_2}$$

beachte:

Es gibt viele Möglichkeiten, N Würfe so durchzuführen, daß N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" erscheint!

Anzahl dieser Möglichkeiten: $\dfrac{N!}{N_1! \, N_2!}$

Begründung:

$N!$: Zahl der Möglichkeiten, N Ereignisse auf die mögl. Ergebnisse zu verteilen (Permutationen)

Division durch $N_1! \, N_2!$, da die Ereignisse "Kopf oben" bzw. "Zahl" oben untereinander ununterscheidbar sind!

$\Rightarrow$ Wahrsch., N_1 mal "Kopf oben" und N_2 mal "Zahl oben" unabhängig von der Reihenfolge zu werfen

$$W_N(N_1) = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \frac{N!}{N_1!\, N_2!}$$

$p_2 = 1 - p_1$

$N_2 = N - N_1$

„Binomialverteilung"

Beispiel für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung
(N₁ ist diskrete Variable)

Name rührt aus dem Binomialsatz

$$(p_1 + p_2)^N = \sum_{N_1=0}^{N} \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}$$

Binomialsatz

für allg. p_1, p_2
(also nicht notwendigerweise
$p_1 + p_2 = 1$)

beachte: $\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} = \frac{N!}{N_1!\, N_2!}$

$\Rightarrow$ Der Summand entspricht
gerade der Verteilung $W_N(N_1)$
falls $p_1 + p_2 = 1$!

Setze nun im Binomialsatz

$p_1 + p_2 = 1$

$$\rightarrow \quad 1^N = \boxed{1 = \sum_{N_1=0}^{N} W_N(N_1)}$$

Die Binomialverteilung ist also normiert!

Berechne nun den Mittelwert von N_1

$$\langle N_1 \rangle = \frac{\sum_{N_1=0}^{N} W_N(N_1)\, N_1}{\sum_{N_1=0}^{N} W_N(N_1)} = \sum_{N_1=0}^{N} W_N(N_1)\, N_1$$

setze Ausdruck für $W_N(N_1)$ ein

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1!\, N_2!}\, p_1^{N_1}\, p_2^{N_2}\, N_1$$

Trick: Fasse vorübergehend p_1, p_2 als unabhängige Variable auf

und benutze: $N_1 p_1^{N_1} = p_1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_1}\left(p_1^{N_1}\right)}_{N_1 p_1^{N_1-1}}$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1! N_2!}\left(p_1 \frac{\partial}{\partial p_1}\left(p_1^{N_1}\right)\right) p_2^{N_2}$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2}\right) = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1}(p_1+p_2)^N$$

Binomialsatz

$$= p_1 N (p_1+p_2)^{N-1}$$

$$\stackrel{p_1+p_2=1}{=} p_1 N \underbrace{1^{N-1}}_{1} = p_1 N$$

Schwankungen

Definition:

$$\Delta N_1 = N_1 - \langle N_1 \rangle \quad \text{Abweichung vom Mittelwert}$$

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \langle N_1 \rangle - \underbrace{\langle\langle N_1 \rangle\rangle}_{\langle N_1 \rangle} = 0$$

als Maß für die Abweichung vom Mittelwert benutzt man

$$\overline{\Delta N_1} = \sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}$$

mittlere Schwankung (mittlere quadratische Schwankung)

beachte:

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \rangle$$

Schreibweise zeigt, dass $\langle (\Delta N_1)^2 \rangle$ immer positiv ist

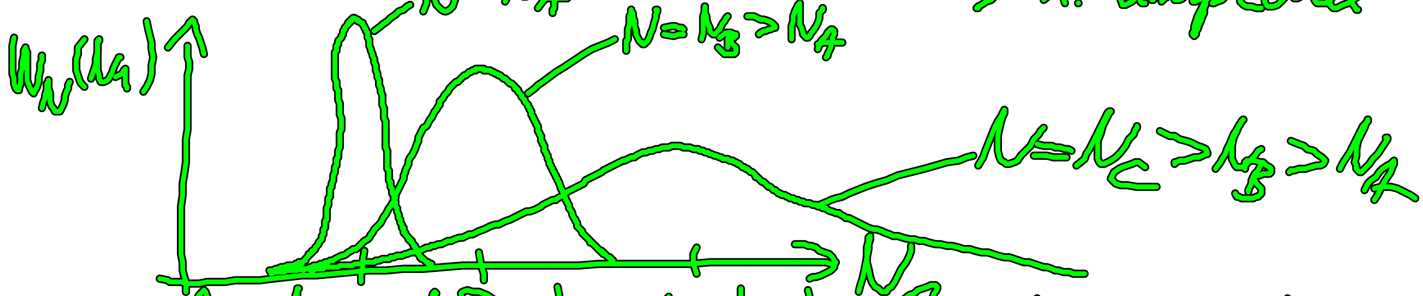
$$= \langle N_1^2 \rangle - \underbrace{\langle N_1 \langle N_1 \rangle \rangle}_{\langle N_1 \rangle^2} - \underbrace{\langle \langle N_1 \rangle N_1 \rangle}_{\langle N_1 \rangle^2} + \langle N_1 \rangle^2$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2$$

Speziell für die Binomialverteilung findet man

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2 = N p_1 (1 - p_1)$$

→ 1. Übungszettel



Mittelwert und Breite der Verteilung wachsen mit N

Alternativen zur direkten Auswertung von Mittelwerten und Schwankungen

$\Rightarrow$ Charakteristische Funktion

allg.: gegeben sei eine diskrete Zufallsvariable x_ℓ mit Wahrsch. $W(x_\ell)$ normierten

definiere

$$f(k) = \langle e^{ikx} \rangle$$ charakterist. Funktion

$$= \sum_{\ell=1}^{M} e^{ikx_\ell} W(x_\ell)$$

Für die sogenannten Momente der Verteilung gilt:

$$\boxed{\langle x^n \rangle = (-i)^n \frac{d^n f}{dk^n}\bigg|_{k=0}} \quad (*)$$

"n-tes Moment"

z.B. $n=1$

rechte Seite von $(*)$

$$(-i)\frac{df}{dk}\bigg|_{k=0} = \left(\sum_{l=1}^{N} e^{ikx_l}\, ix_l\, (-i)\, W(x_l)\right)\bigg|_{k=0}$$

$$= \langle e^{ikx} x \rangle_{k=0} = \langle x \rangle$$

o.k.!

Daraus folgt auch

$$f(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^n}{n!} \frac{d^n f}{dk^n}\bigg|_{k=0} \quad \text{Taylorentwicklung}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{(ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle$$

$\Rightarrow$ Möglichkeit, die volle charakteristische Funktion zu berechnen, falls alle Momente existieren und bekannt sind

Illustration: Binomialverteilung:

$$f(k) = \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1!\,N_2!}\, p_1^{N_1} p_2^{N_2}\, \overbrace{e^{ikN_1}}^{(e^{ik})^{N_1}}$$

$$= \sum_{N_1=0}^{N} \frac{N!}{N_1!\,N_2!} \left(p_1 e^{ik}\right)^{N_1} p_2^{N_2}$$

$$\overset{\text{Binomialsatz}}{=} \left(p_1 e^{ik} + p_2\right)^N$$

$$\langle N_1\rangle = (-i)\frac{df}{dk}\Big|_{k=0} = \Big[(-i)\,N\,(p_1 e^{ik}+p_2)^{N-1}\cdot i p_1 e^{ik}\Big]_{k=0}$$

$$= \underbrace{(\;)}_{1}{}^{2}\, N (p_1+p_2)^{N-1} p_1$$

$$\underset{\uparrow \; p_1+p_2=1}{=} p_1 N \quad \checkmark\checkmark$$

I.2. Von der Binomialverteilung zur Gaußverteilung

Erinnerung: Für die Binomialverteilung ist $\langle N_1 \rangle = N p_1$

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = N p_1 p_2$$

Betrachte nun die relative Schwankung

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} = \frac{\langle \overline{\Delta N_1} \rangle}{\langle N_1 \rangle}$$

~~speziel~~ spezielle Binomialverteilung:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}{\langle N_1\rangle} = \frac{\sqrt{N p_1 p_2}}{N p_1} = \sqrt{\frac{\cancel{N}\,\cancel{p_1}\,p_2}{N^{\cancel{2}}\,p_1^{\cancel{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\,\sqrt{\frac{1}{N}}$$

Für die Binomialverteilung <u>verschwindet</u> die relative Schwankung im Limes $N \to \infty$!!

gilt auch allgemeiner

"Gesetz der großen Zahlen"

Für sehr große N wird die Binomialverteilung zu einer scharf lokalisierten Verteilung um den Mittelwert $\langle N_1\rangle$!!

<u>Ziel jetzt:</u>

Funktionale Form der Binomialverteilung für große N

<u>Vorgehen:</u>
Taylorentwicklung der Funktion $W_N(N_1)$ um das Maximum

genauer:
Wir entwickeln nicht $W_N(N_1)$ an sich, sondern den Logarithmus $\ln W_N(N_1)$ (um den Wert $\langle N_1 \rangle$ herum)

"Begründung"

Betrachte Funktion $f(n) = p^n = e^{n \ln p}$

entwickle um $n = \bar{n}$ ← Mittelwert

1) Taylor von $f(n)$ um $n = \bar{n}$

$$f(n) \approx f(\bar{n}) + f'(\bar{n})(n - \bar{n}) + \mathcal{O}((n-\bar{n})^2)$$

$$= p^{\bar{n}} + \ln p \; \underbrace{p^{\bar{n}}}_{} (n - \bar{n}) + \text{"}$$

ist für sehr große $\bar{n}$ wieder sehr groß

$\Rightarrow$ schlechte Konvergenz!

2) Taylor-Entwicklung des Logarithmus

$$\ln f(n) = n \ln p$$

$$= \bar{n} \ln p + \ln p \,(n - \bar{n}).$$

keine höheren Terme!

Koeffizient endlich

Entwickle nun also $\ln W_N(N_1)$ bzgl. N_1 um $\langle N_1 \rangle = N p_1$ (halte N und p_1 fest)

Sterlpunkt.

$$\ln W_N(N_1) = \ln\left(\frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \right)$$

$$\ln W_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! + N_1 \ln p_1 + N_2 \ln p_2$$

benötige Ableitungen bzgl. N_1 !

benutze: $N_2 = N - N_1$

z.B.

$$\frac{d \ln N_1!}{dN_1} \approx \frac{\ln (N_1+1)! - \ln N_1!}{1} = \ln \frac{(N_1+1)!}{N_1!}$$

Annäherung durch Differenzenquotienten

$$= \ln (N_1 + 1)$$

$$\underset{N_1 \gg 1}{\approx} \ln N_1$$

!!

(alternativ: Stirling-Formel

$$\ln N_1! \simeq N_1 \ln N_1 - N_1$$

$$\frac{d \ln N_1!}{dN_1} \approx \ln N_1 + \frac{\cancel{N_1}}{\cancel{N_1}} - \cancel{1} \leftarrow \ln N_1 \Big)$$

analog:

$$\frac{d \ln N_2!}{dN_1} = \frac{d \ln (N - N_1)!}{dN_1}$$

$$= \;\ldots\ldots = -\ln (N - N_1)$$

insgesamt:

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} = -\ln N_1 + \ln (N - N_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

betrachte das an der Stelle des Mittelwerts

$$\langle N_1\rangle = N p_1$$

$$\left.\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1}\right|_{N_1=\langle N_1\rangle} = -\ln Np_1 + \ln(\overbrace{N - Np_1}^{N(1-p_1)}) + \ln p_1 - \ln(1-p_1)$$

$$= -\cancel{\ln Np_1} + \cancel{\ln N} + \cancel{\ln(1-p_1)} + \cancel{\ln p_1} - \cancel{\ln(1-p_1)}$$

$$= 0$$

Das Verschwinden des Terms ist konsistent mit der Tatsache, dass wir um ein Extremum entwickeln!