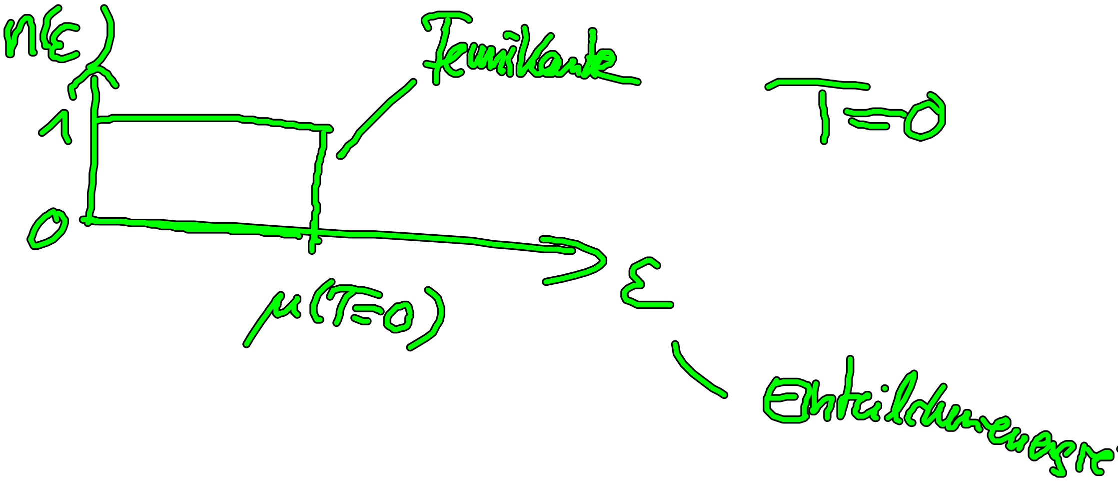
Wh:



$T=0$

$$n_\alpha \longrightarrow n_p \Longleftrightarrow n_\varepsilon = n(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = p^2/2m$$

Fermikante: $\varepsilon_F = \mu(T=0) = \frac{p_F^2}{2m}$

Es gilt: $p_F = \left(\frac{6\pi^2}{2s+1}\right)^{\frac{1}{3}} \hbar \rho^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow E_{T=0} = \frac{3}{5}\varepsilon_F N \neq 0$ Gesamtenergie $\quad \varepsilon_F \sim \rho^{\frac{2}{3}}$

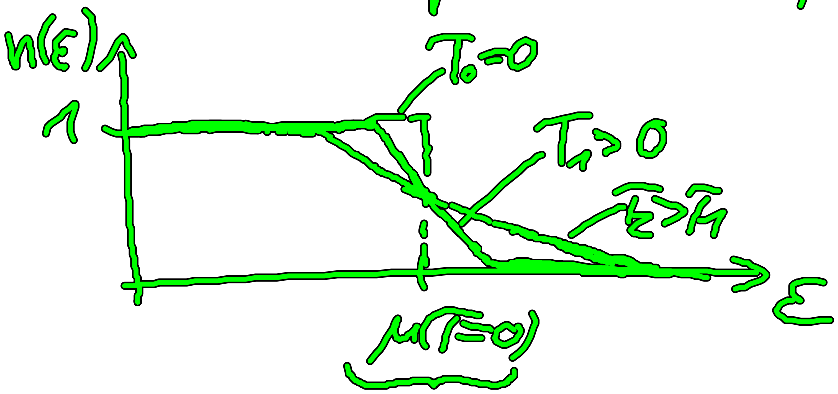
klass.: $E = \frac{3}{2} N k_B T$

VII.7. „Fast entartetes" Fermigas

Sommerfeldentwicklung

~~[illegible]~~ betrachte sehr tiefe, aber von Null verschiedene Temperaturen ($\beta\mu \gg 0$)

$\beta = \frac{1}{k_B T}$



„Aufweichung" der Fermikante

„Aufweichungszone" hat ungefähr eine Breite von $k_B T$

Wir interessieren uns für thermodyn. Größen im Grenzfall kleiner Temperaturen, insbesondere für die Gesamtenergie

$$E(T) \Longrightarrow C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$$ Wärmekapazität

$$\langle E \rangle = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \, \frac{p^2}{2m} \, n\left(\frac{p^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \, 4\pi \, \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty d\varepsilon \; \varepsilon^{\frac{1}{2}} \, \varepsilon \, n(\varepsilon)$$

(Wechsel der Integrationsvariable)

$\langle E \rangle = \sum_\alpha n_\alpha \varepsilon_\alpha$

hier: $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, Abstände zw. Niveaus klein

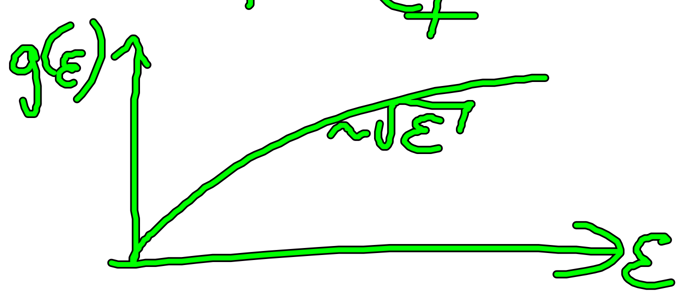
definiere hier die sogenannte Zustandsdichte $g(\varepsilon)$

$$\varepsilon < 0 : \quad g(\varepsilon) = 0$$

$$\varepsilon > 0 : \quad g(\varepsilon) = 2 \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_F}}$$

$$\varepsilon_F = \left(\frac{6\pi^2}{2}\right)^{3/2} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{\frac{2}{3}}$$



Die $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ – Abhängigkeit von $g(\varepsilon)$ hat mit der Dispersionsrelation $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ zu tun (nichts mit der Statistik)

Interpretation der Zustandsdichte

$g(\varepsilon)\,d\varepsilon$: Zahl der Einteilchenzustände im Energieintervall $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; g(\varepsilon)\, n(\varepsilon) = \langle N \rangle$$

und $$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; g(\varepsilon)\, \varepsilon \, n(\varepsilon)$$

speziell bei $T=0$ gilt:

$$n(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \le \varepsilon_F \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_F \end{cases}$$

Zu untersuchen sind also Integrale der Form

$$I \hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; F(\varepsilon)\, n(\varepsilon)$$

mit $F(\varepsilon) \sim g(\varepsilon)$

Auswertung: Sommerfeld-Entwicklung

Ausnutzen der Tatsache, dass sich $n(\varepsilon)$ nur in einer ~~sehr~~ schmalen Zone um $\bar{\mu}(T=0)$ von einer Stufenfunktion unterscheidet

Ergebnis

$$I \approx \int_{-\infty}^{\mu(T=0)} d\varepsilon \; F(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left.\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu(T=0)}$$

$$+ \mathcal{O}(T^4)$$

Anwendung auf die mittlere Gesamtenergie

$$F(\varepsilon) = g(\varepsilon)\,\varepsilon$$

Man findet:

$$\frac{E}{N} = \underbrace{\frac{E(T=0)}{N}}_{3/5\,\varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\varepsilon_F}(k_B T)^2 + \mathcal{O}(T^4)$$

Daraus die spezifische Wärme:

$$\tilde{c}_V = \frac{C_V}{N} = \frac{1}{N}\frac{\partial E}{\partial T}$$

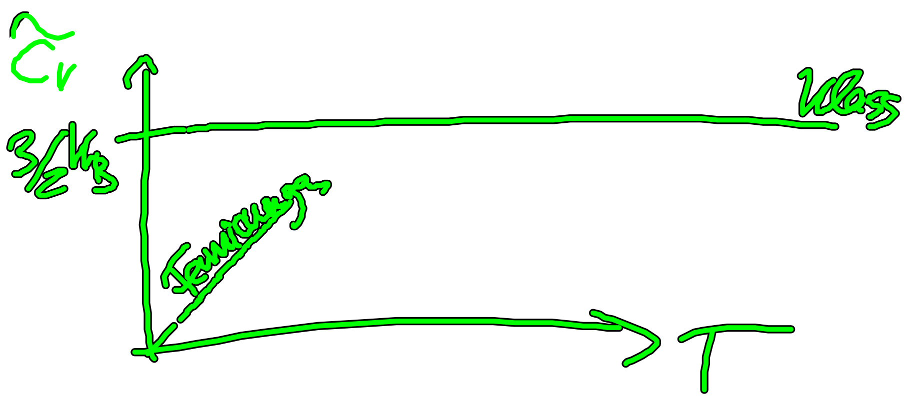
$$= k_B \frac{\pi^2}{2}\frac{k_B T}{\varepsilon_F} + \mathcal{O}(T^3)$$

Das ideale Fermigas ist also durch eine lineare Abhängigkeit der spezif. Wärme von T gekennzeichnet!

Vergleich mit klass. Resultat

$$\frac{C_V^{klass}}{N} = \frac{1}{N}\frac{\partial E^{klass}}{\partial T} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2} N k_B T\right)$$

$$= \frac{3}{2} k_B$$



Für Leitungselektronen im Metall wird diese ~~Fermi-Theor~~ Sommerfeldentwicklung falsch für höhere T

Grund: Gitterschwingungen (Phonon!)

VII.8. Bosonen bei tiefen Temperaturen

Was erwarten wir?

- tiefe T : Bosonensystem will Energie minimieren
  $\Rightarrow$ Teilchen besetzen möglichst tiefe Energieniveaus

  hier: Kein Pauliprinzip
  $\Rightarrow$ Alle Teilchen gehen in den Grundzustand

Wir erwarten:

$$n_{\alpha_0} \sim \mathcal{O}(N) \quad \text{für } T \to 0$$

Aber: Besetzung des makroskop. Grundzustands läuft ab als eine Art Phasenübergang

→ „Bose-Einstein-Kondensation"!

Bose-Einstein-Statistik

$$\langle n_k \rangle = \langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)} - 1}$$

$$\boxed{\varepsilon_k \to \frac{p^2}{2m}}$$

Man sieht: Damit Ausdruck endlich muß gelten

$$e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)} > 1 \quad \forall p$$

$$\Leftrightarrow \mu < \frac{p^2}{2m} \quad \forall p \implies \boxed{\mu < 0}$$

mittlere Teilchenzahl

$$\langle N\rangle = \sum_{p} \langle n_p\rangle$$

$$\rho = \frac{\langle N\rangle}{V} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int dp\, \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)}-1}$$

Das kann wie folgt umgeschrieben werden

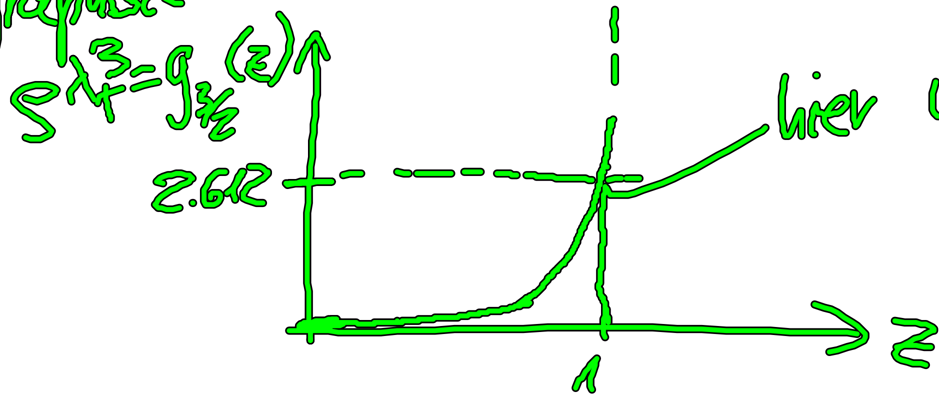
$$(*) \quad \boxed{\rho\lambda_T^3 = g_{3/2}(z)} \qquad \text{mit } g_{3/2}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^{3/2}}$$

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{\hbar}{mk_BT}} \qquad z = e^{\beta\mu}$$

aus (*) folgt die Dichte als Funktion von μ und T

andererseits kann (*) auch als Bestimmungsgleichung für μ bei festem ρ, T betrachtet werden.

graphisch



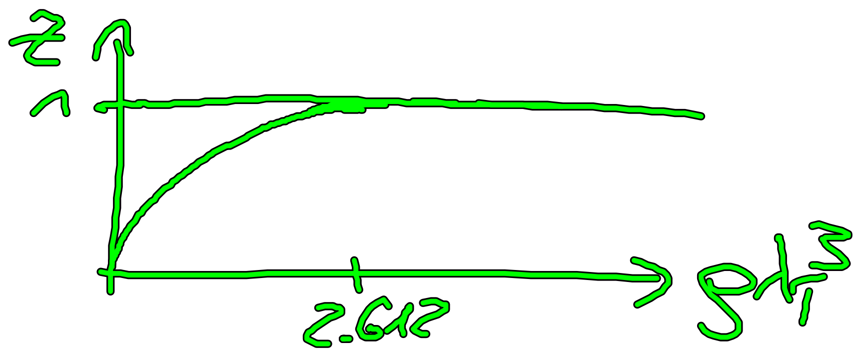
hier wird die Steigung ∞ !

Im Bereich $0 \le z < 1$

wächst die Dichte mit der

Fugazität —— "normales" Verhalten

umgekehrt: z als Funktion $\rho\lambda^3$



Man sieht:

· Für $\rho\lambda^3 < 2.612$ ist

$z < 1$

$\Leftrightarrow \mu < 0$ normales Verhalten

- Für $\varrho \lambda_T^3 > 2.612$ Problem!

z liegt nicht mehr im erlaubten Bereich!

Definiere eine Grenztemperatur über

$$\varrho \lambda_T^3 \Big|_C = \varrho \hbar^3 \left(\frac{2\pi}{m k_B T}\right)^{3/2} \overset{!}{=} 2.612$$

$$\rightarrow T_C = \frac{2\pi \hbar^2}{k_B m} \left(\frac{\varrho}{2.612}\right)^{\frac{2}{3}} \sim \varrho^{\frac{2}{3}}$$

Für festes ρ gilt also

$$T > T_C \Leftrightarrow \rho \lambda_T^3 < 2.612$$

$$z < 1$$

normal

$$T < T_C \qquad z \to 1$$

Beschreibung des Tieftemperaturbereichs:

hier darf man bei der Berechnung von

$\langle N \rangle = \sum_p \langle n_p \rangle$ nicht mehr einfach den Übergang zum Integral machen!

Neuer Ansatz für tiefe Temperaturen.

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V}$$

$$= \frac{1}{V} \langle n_{p=0} \rangle + \frac{1}{V} \sum_{p \neq 0} \langle n_p \rangle$$

Beitrag des Grundzustands

Beitrag der angeregten Zustände

$$= \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1}-1} + \rho_n(T,\mu)$$

mit $z = e^{\beta\mu}$

kann wieder als Integral ausgewertet werden!

Eine genauere Analyse zeigt

$T > T_C$: Beitrag des Grundzustands verschwindet, denn

$$\rho_0(T) = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \underbrace{\frac{1}{z^{-1}-1}}_{\text{endlich}} = 0$$

Besetzung des Grundzustands.

$$T < T_C : \frac{\rho_0(T)}{\rho_{Gesamt}} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$$

Also: Verhalten des Ordnungsparameters

$$\frac{\rho_a(T)}{\rho_{Gesamt}} = \begin{cases} 0\,, & T > T_C \\ 1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}\,, & T < T_C \end{cases}$$