

# Theoretische Optik / Quantenoptik

E-Mail: [appel@fhi-berlin.mpg.de](mailto:appel@fhi-berlin.mpg.de)

Sprechstunde: Fr. 12-13 Uhr Ekr 728

1.5. Übungsblatt online

5.5. " als Ausdruck in Übung + Besprechung

## I Erste Quantisierung

### 1.1. Wellengleichung für (einzelne) Photonen in erster Quantisierung

E-immerung: Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \text{Faraday}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad \text{Ampere}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Gauss}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Riemann-SLS-System (RS) Vektor

$$\vec{F}(\pm) = \vec{E} \pm i\vec{B}, \quad \vec{E}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$$

Maxwell-Gl. in RS Form

$$i \partial_t \vec{F}(\pm) = \pm c \vec{\nabla} \times \vec{F}(\pm)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\pm) = 0$$

Vektor-Jacobitrit

$$\vec{a} \times \vec{b} = -i (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gl. in Schrödinger-Form

$$i \partial_t \vec{F} = c \vec{\nabla} \times \vec{F} = c (-i (\vec{S} \cdot \vec{\nabla})) \vec{F} \quad | \cdot t_1$$

$$\vec{F} = \vec{F}(r, t)$$

$$i t_1 \partial_t \vec{F} = c (\vec{S} \cdot (-i t_1 \vec{\nabla})) \vec{F} = c (\vec{S} \cdot \vec{p}) \vec{F}$$

$$i t_1 \partial_t \vec{F} = H \vec{F}, \quad H = c \vec{S} \cdot \vec{p}$$

Photon Schröd.-Gl. und Hamiltonian in 1. Quantisierung (für ein einzelnes Photon)

Spin 1 Teilchen, linear Dispersion

Helizität

$$\lambda \equiv \vec{S} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$$

ganzzahligen Spin:  $\lambda \rightarrow -S, -S+1, \dots, 0, \dots, S-1, S$

halbzahligen Spin:  $\lambda \rightarrow -S, -S+1, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, S-1, S$

$$\vec{S}^{(1/2)} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\vec{F}^\pm = E \pm iB$$

Stationäre Zustände

$$\vec{F}^+(r, t) = \vec{F}_0^+(r) \cdot e^{+i \omega t}$$

$$\vec{F}^-(r, t) = \vec{F}_0^-(r) e^{-i \omega t}$$

$$H \vec{F}_0^+ = E \vec{F}_0^+$$

$$H \vec{F}_0^- = E \vec{F}_0^-$$

$$c (\vec{S} \cdot \vec{p}) \vec{F}_0 = \hbar \omega \vec{F}_0$$

$$-c (\vec{S} \cdot \vec{p}) \vec{F}_0 = -\hbar \omega \vec{F}_0$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}^+ \\ \vec{F}^- \end{pmatrix}$$

Alternative Herleitung

Erinnerung: Dirac Gl.

Relativistische Energie-Impuls Relation

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2}$$

1. Quantisierung  $\vec{p} \rightarrow -i \hbar \vec{\nabla} \quad E \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \left\{ \vec{r}, \vec{p} \right\} = i \hbar$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + (m_0 c^2)^2} \psi$$

Dirac-Gl. für Spinor

Quadratsumme

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \nabla^2 \psi + \frac{m_0 c^2}{\hbar} \psi = 0$$

Klein-Gordon Gl.  
2.4e Ordnung in t

Lösung von Dirac: Faktorisieren

$$(E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4) I^{(4)} \psi^D = 0$$

$$\left[ E I^{(4)} + \begin{pmatrix} m_0 c^2 I^{(2)} & c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m_0 c^2 I^{(2)} \end{pmatrix} \right] \cdot \left[ E I^{(4)} - \begin{pmatrix} m_0 c^2 I^{(2)} & c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m_0 c^2 I^{(2)} \end{pmatrix} \right] \psi^D = 0$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$i \hbar \partial_t \psi^D = H_D \psi^D \quad ; \quad H_D = \begin{pmatrix} m_0 c^2 I^{(2)} & -i \hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ -i \hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & -m_0 c^2 I^{(2)} \end{pmatrix} = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2$$

Faktorisierung des d'Alembert Operators für Photonen

$$(E^2 - c^2 p^2) I^{(3)} \psi^P = 0$$

$$(E I^{(3)} - c \vec{S} \cdot \vec{p}) (E I^{(3)} + c \vec{S} \cdot \vec{p}) \psi^P - c^2 p(p \cdot \psi^P) = 0$$

$$\uparrow \uparrow$$

$$E I^{(3)} \psi^P = c \vec{S} \cdot \vec{p} \psi^P$$

$$p \cdot \psi^P = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} i \hbar \partial_t \psi^P &= c \vec{S} \cdot (-i \hbar \vec{\nabla}) \psi^P \\ \vec{\nabla} \cdot \psi^P &= 0 \end{aligned}}$$

Maxwell-Gl.  
in Strahlung-Form

$\hookrightarrow$  Nebenbedingung: Kompatibilität mit Hermitizität  
 $\rightarrow$  für alle Zeiten erfüllt  
falls Bedingung bei  $t=0$  erfüllt

1.2. N unterschiedliche Teilchen

Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2m_1} \nabla_{r_1}^2 + V(r_1) - \frac{1}{2m_2} \nabla_{r_2}^2 + V(r_2) - \dots$$

$$= \sum_{j=1}^N \psi_j(\vec{r}_j) \quad ; \quad \psi_j(\vec{r}_j) = -\frac{1}{2m_j} \nabla_{\vec{r}_j}^2 + V(\vec{r}_j)$$

Einteilchen SG

$$h_j \phi_{\alpha_j}(\vec{r}_j) = \epsilon_{\alpha_j} \phi_{\alpha_j}(\vec{r}_j) \quad , \quad \phi_{\alpha} \in L_2(\mathbb{R}^3) \text{ "quadrat integrabel"}$$

$N$ -Teilchen Zustand

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) &= \phi_{\alpha_1}(\vec{r}_1) \phi_{\alpha_2}(\vec{r}_2) \dots \phi_{\alpha_N}(\vec{r}_N) \in L_2(\mathbb{R}^{3N}) \\ &= \langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N | \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \rangle \end{aligned}$$

$N$ -Teilchen SG

$$H \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = E_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$$

$$E_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \epsilon_{\alpha_1} + \dots + \epsilon_{\alpha_N}$$

$\rightarrow$  partielle DGL in  $3N$ -Dimensionen, Randwertp.-Bd.

Orthogonalität und Vollständigkeit

$$\langle \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} | \underline{\Phi}_{\beta_1 \dots \beta_N} \rangle = \delta_{\alpha_1, \beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2, \beta_2} \cdot \dots \cdot \delta_{\alpha_N, \beta_N}$$

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N} | \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \rangle \langle \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} | = \mathbb{1}$$

### 1.3 $N$ nicht-unterscheidbare Teilchen

kombinierte Koordinaten  $x_j = (\vec{r}_j, s_j) \quad \int dx = \sum_s \int d^3r$

Transposition

$$P_{ij} \underline{\Phi}(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_N) = \underline{\Phi}(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_N)$$

Identität und Inverse

$$P_{jk} P_{jk} = \mathbb{1} \quad (P_{jk}^{-1} P_{jk}) \cdot P_{jk} = P_{jk}^{-1} \quad P_{jk}^{-1} = P_{jk}$$

Allgemeine Permutation

$$P = \prod P_{jk}$$

## Bosonische Zustände

$$P_{ij} \underline{\Phi}^{(+)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = + \underline{\Phi}^{(+)}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad \text{"symmetrisch"}$$

Bsp.: Phononen, Photonen,  $\alpha$ -Teilchen, ...

## Fermionische Zustände

↙ Ansd. des  
Pauli-Prinzips

$$P_{ij} \underline{\Phi}^{(-)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = - \underline{\Phi}^{(-)}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad \text{"anti-symmetrisch"}$$

Bsp.: Elektronen, Protonen, Quarks, ...

## Symmetrische Zustände

$$\underline{\Phi}_{x_1, \dots, x_N}^{(\pm)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^N u_j!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{|P|} P \phi_{a_1}(x_1) \phi_{a_2}(x_2) \dots \phi_{a_N}(x_N)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^N u_j!}} \begin{vmatrix} \phi_{a_1}(x_1) & \phi_{a_1}(x_2) & \dots & \phi_{a_1}(x_N) \\ \phi_{a_2}(x_1) & \phi_{a_2}(x_2) & \dots & \phi_{a_2}(x_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{a_N}(x_1) & \phi_{a_N}(x_2) & \dots & \phi_{a_N}(x_N) \end{vmatrix}_{\pm}$$

Fermionen:  $\underline{\Phi}^{(-)}$ ,  $u_j \in \{0, 1\}$

Bosonen:  $\underline{\Phi}^{(+)}$ ;  $u_j \in \mathbb{N}_0$

## Permanente

$$\begin{vmatrix} \phi_a & \phi_b \\ \phi_c & \phi_d \end{vmatrix}_+ = \phi_a \phi_d + \phi_b \phi_c$$

Laplace Entwicklung

$$\begin{vmatrix} \phi_a & \phi_b & \phi_c \\ \phi_d & \phi_e & \phi_f \\ \phi_g & \phi_h & \phi_i \end{vmatrix}_+ = \phi_a \begin{vmatrix} \phi_e & \phi_f \\ \phi_h & \phi_i \end{vmatrix}_+ + \phi_b \begin{vmatrix} \phi_d & \phi_f \\ \phi_g & \phi_i \end{vmatrix}_+ + \phi_c \begin{vmatrix} \phi_d & \phi_e \\ \phi_g & \phi_h \end{vmatrix}_+$$

WF ist eindeutig durch Permutationen definiert

WF bis auf gleiches Vorzeichen bei einer Determinante definiert  $\rightarrow$  Anordnung im  $N$ -Tupel von Bedeutung fest.

### Satz 1

Die Menge der WF  $\{\Phi^{(+)}\}$  und analog  $\{\Phi^{(-)}\}$  sind jeweils vollständig in  $L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N})$ , falls die zugehörige Einteilchenbasis  $\{\phi_a\}$  vollständig in  $L_2(\mathbb{R}^3)$  ist.

(ohne Basis)

### Korollar 1

Jede beliebige fermionische / bosonische  $N$ -Teilchen WF kann durch eine Linearkombination von Determinanten / Permutationen dargestellt werden

$$\Psi^{(\pm)}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \bar{\Phi}_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^{(\pm)}(x_1, \dots, x_N)$$

## II Zweite Quantisierung

### 2.1. Fock-Raum

Hilbert Raum für  $N$ -Teilchen Systeme

$$\mathcal{H}(N) \equiv L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N})$$

Fock-Raum

$$\begin{aligned} \bar{F} &\equiv \mathcal{H}(0) \oplus \mathcal{H}(1) \oplus \mathcal{H}(2) \oplus \mathcal{H}(3) \dots \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}(n) \end{aligned}$$

Vektoren im Fock-Raum

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x \\ \phi_{x_1}(x_1) \\ \Phi_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ \Phi_{x_1 x_2 x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ \downarrow \infty \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 0 \text{ Teilchen} \\ \leftarrow 1 \text{ Teilchen} \\ \leftarrow 2 \text{ Teilchen} \\ \vdots \end{array}$$