

3.5 Thermische Zustände

Quantenzustände $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots)$

$$|\Psi\rangle = \sum_{\underline{c}} f_{\underline{c}} |n_{c_1}, n_{c_2}, n_{c_3}, \dots, n_{c_n}\rangle$$

↑ Multi-Moden Zustand → Permutation

Statistische Mischungen

$$P_1: |\Psi_1\rangle, \quad P_2: |\Psi_2\rangle, \quad P_3: |\Psi_3\rangle, \dots$$

Normierung der statistischen Gewichte

$$\sum_j P_j = 1$$

Ensemble-Mittel einer Observablen \underline{O}

$$\langle \underline{O} \rangle = \sum_j P_j \langle \Psi_j | \underline{O} | \Psi_j \rangle \quad (*)$$

Vollständiger Satz von Multi-Moden Zuständen

$$\sum_q |\Phi_q\rangle \langle \Phi_q| = \mathbb{1}$$

Einsetzen in (*)

$$\begin{aligned} \langle \underline{O} \rangle &= \sum_j P_j \langle \Psi_j | \underline{O} \sum_q |\Phi_q\rangle \langle \Phi_q| \Psi_j \rangle \\ &= \sum_j \sum_q P_j \langle \Phi_q | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \underline{O} | \Phi_q \rangle \end{aligned}$$

Definition des Dichteparameters

$$\underline{\rho} = \sum_j P_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j|$$

Damit lässt sich das Ensemble-Mittel der Observablen schreiben als

$$\begin{aligned} \langle \underline{O} \rangle &= \sum_q \langle \Phi_q | \underline{\rho} | \Phi_q \rangle \\ &= \text{Tr}(\underline{\rho} \underline{O}) \end{aligned}$$

Spezielle Wahl von \underline{O} : $\underline{O} = \mathbb{1}$

$$\langle \mathbb{1} \rangle = 1 = \text{Tr}(\underline{\rho} \mathbb{1}) = \text{Tr}(\underline{\rho}) \rightarrow \text{Normierung}$$

Moden-Population im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T

$$P_n = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{\sum_n e^{-E_n/k_B T}} \quad \text{"Boltzmann-Gewichte"}$$

Energie-Eigenwerte des harmonischen Oszillators

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Ableitung

$$z = e^{-\hbar\omega/k_B T}$$

$$P_n = \frac{z^n}{\sum_n z^n} \quad \text{Mittelpunktsenergie lässt sich}$$

weil es eine geometrische Reihe

$$\sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$$

$$P_n = (1-z) z^n = \left(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T} \right) e^{-n \frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

Dichteoperator für einzelnen Mode des Lichtfeldes im thermischen Gleichgewicht

$$\begin{aligned} \rho_{\text{th. mod}} &= (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_n e^{-n \frac{\hbar\omega}{k_B T}} |n\rangle \langle n| \quad \leftarrow \text{Oszillator-Energie-Eigenwerte} \\ &= (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} a^\dagger a} |n\rangle \langle n| \quad \leftarrow a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle \\ &= (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} a^\dagger a} \sum_n |n\rangle \langle n| \\ &= (1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T} a^\dagger a} \quad \leftarrow \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{\text{th. mod}} &= \text{Tr}(\rho_{\text{th. mod}} n) \\ &= \sum_q \langle q | \rho_{\text{th. mod}} n | q \rangle \\ &= \sum_q \langle q | \sum_n P_n |n\rangle \langle n| n | q \rangle = \sum_q \sum_n n \cdot P_n \cdot \delta_{nq} \\ &= \sum_n n \cdot P_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{\text{th. mod}} &= \sum_n n \cdot P_n = (1-z) \sum_n n \cdot z^n \\ &= (1-z) z \frac{\partial}{\partial z} \sum_n z^n \end{aligned}$$

$$= (1-z) z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{1-z}$$

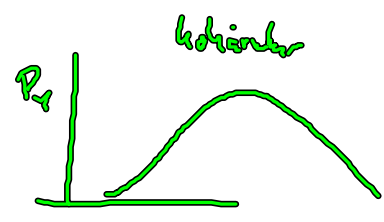
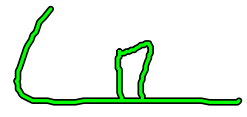
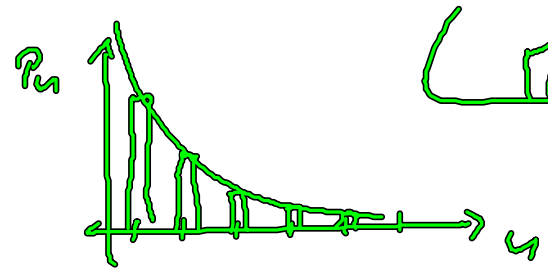
$$= \frac{z}{1-z} \quad \leftarrow \quad z = \frac{\langle n \rangle_{th}}{\langle n \rangle_{th} + 1}$$

$$\langle n \rangle_{th} = \frac{1}{e^{\langle n \rangle_{th} / k_B T} - 1}$$

$$P_n = (1-z) z^n = \frac{\langle n \rangle_{th}^n}{(1 + \langle n \rangle_{th})^{n+1}}$$

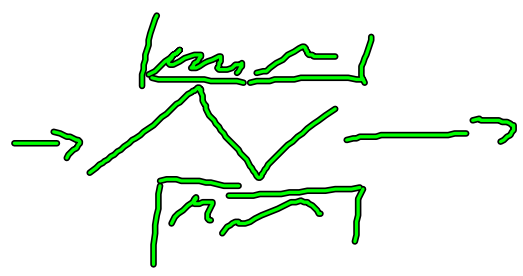
geometrische Verteilung
Bose-Einstein Verteilung

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle_{th}^n}{(1 + \langle n \rangle_{th})^{n+1}} |n\rangle \langle n|$$



E-Wirkung auf ein Multimodalfeld

$$\rho_{th}^{n_{in}} = \sum_{\{n_k\}} \prod_k \frac{\langle n_k \rangle_{th}^{n_k}}{(1 + \langle n_k \rangle_{th})^{n_k+1}} |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}|$$



4 Photon Detektion und klassische Eigenschaften des EA-Felds

4.1 Ideale Photon Detektion

Class.-Modell für idealen Photodetektor.

Asorption und Erzeugung eines Photons
bzw. Photons

Positive Frequenzkomponente des elektrischen Feldoperators

$$\underline{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} \underline{a}_{\vec{k}, \lambda} \underline{u}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$$

$$\underline{u}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \underline{e}_{\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\underline{E}(\vec{r}, t) = \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) + \underline{E}^{-}(\vec{r}, t)$$

$$\underline{E}^{-} = (\underline{E}^{+})^\dagger$$

Übergangsamplitude von Anfangszustand $|\psi_i\rangle$ zu Endzustand $|\psi_f\rangle$
geniesst Fermi's goldener Regel

$$T_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle|^2 \rho \quad \leftarrow \text{Zustandsdichte}$$

Intensität

$$I(\vec{r}, t) = \sum_f |\langle \psi_f | \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle|^2$$

$$= \sum_f \langle \psi_i | \underline{E}^{-}(\vec{r}, t) | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle$$

$$= \langle \psi_i | \underline{E}^{-}(\vec{r}, t) \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) | \psi_i \rangle$$

Analog für gemischten Zustand (beschrieben durch $\underline{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$)

$$I(\vec{r}, t) = \text{Tr} \left(\underline{\rho} \underline{E}^{-}(\vec{r}, t) \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) \right)$$

Observable für Licht-Intensität

Beispiel: Einzelne Mode im Fock $|n_k\rangle$

$$\underline{E}^{+}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} \underline{a}_k \underline{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$$

$$I(\vec{r}, t) = \langle n_k | \underline{E}^{-}(\vec{r}, t) \underline{E}^{+}(\vec{r}, t) | n_k \rangle$$

$$= \frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} |u_k(\vec{r})|^2 \underbrace{\langle n_k | \underline{a}_k^\dagger \underline{a}_k | n_k \rangle}_{n_k}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \omega_k}{2\epsilon_0} |u_k(\vec{r})|^2 \cdot n_k$$

4.2 Korrelationsfunktion des EM-Feldes

Definition: Korrelationsfunktion n-ter Ordnung

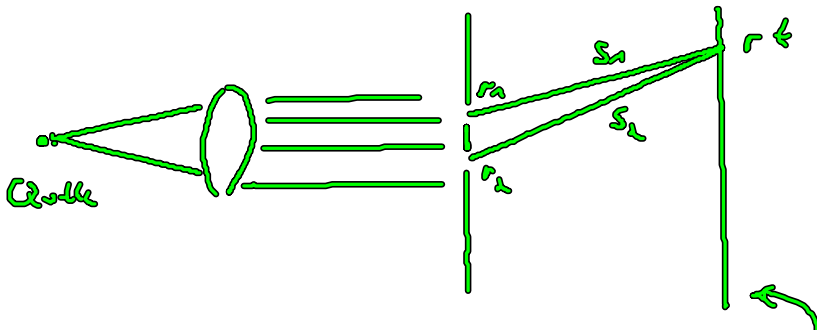
$$G^{(n)}(x_1 - x_n; x'_1 - x'_n) = \text{Tr} \left(\underline{\rho} E^-(x_1) E^-(x_2) \dots E^-(x_n) E^+(x'_1) E^+(x'_2) \dots E^+(x'_n) \right)$$

w. hi $x_j = (\vec{r}_j, t)$, $x'_j = (\vec{r}'_j, t')$

Eigenschaften

- $G^{(n)}(x_1, x_1) \geq 0$
- $G^{(n)}(x_1 - x_n; x_n - x_1) \geq 0$
- $G^{(n)}(x_1, x_2) \cdot G^{(n)}(x_2, x_1) \geq |G^{(n)}(x_1, x_2)|^2$
(v. allg. Schwarz'sche Ungleichung)

4.3 Korrelationsfunktion für Young'sches Doppelspalt Experiment



Positive Frequenzkomponente des Feldes auf Beobachtungsschirm

$$\underline{E}^+(\vec{r}, t) = E_1^+(\vec{r}, t) + E_2^+(\vec{r}, t)$$

Sphärische Welle von Spalt j

$$E_j^+(\vec{r}, t) = \underbrace{E_j^+(\vec{r}_j, t - \frac{s_j}{c})}_{\text{Feld am Spalt } j} \frac{1}{s_j} e^{ik s_j - i\omega t}$$

$$x_j = (\vec{r}_j, t - \frac{s_j}{c})$$

$$s_1 \approx s_2 = R$$

Intensität

$$I(\vec{r}, t) = G^{(2)}(\vec{r}, t; \vec{r}, t)$$

$$= \text{tr} \left(\underline{\rho} \underline{E}^-(\vec{r}, t) \underline{E}^+(\vec{r}, t) \right)$$

$$= \frac{1}{R} \left[\underbrace{G^{(1)}(k_1 x_1)}_{\substack{\text{Interferenz} \\ \rightarrow \text{Spalt 1}}} + \underbrace{G^{(1)}(k_2 x_2)}_{\substack{\text{Interferenz} \\ \rightarrow \text{Spalt 2}}} + \underbrace{2 \cos k(x_1 - x_2)}_{\text{Interferenz}} \cdot G^{(1)}(k_1 x_2) \right]$$

Interferenz Maxima

$$\cos k(x_1 - x_2) = 1 \quad k(x_1 - x_2) = 2\pi \gamma \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

Beispiele für verschiedene Feldzustände

Zwei Moden
$$E^+ = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \frac{e^{-i\omega t}}{R} \left(\underline{a}_1 e^{ikx_1} + \underline{a}_2 e^{ikx_2} \right)$$

$$I \sim \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_2^\dagger a_2 \rangle + 2 |\langle a_1^\dagger a_2 \rangle| \cos k(x_1 - x_2)$$

Beispiele

1. Fock-Zustand

$$|\psi\rangle = |n_1, n_2\rangle = a_1^\dagger{}^{n_1} a_2^\dagger{}^{n_2} |0\rangle$$

$$\rightarrow \text{keine Interferenz da } \langle \psi | a_1^\dagger a_2 | \psi \rangle = 0$$

$$\langle 0 | a_2 a_1 a_1^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle = 0$$

2. kohärenter Zustand

$$|\psi\rangle = |d, d\rangle = |d\rangle |d\rangle$$

$$I \sim \langle a_1^\dagger a_1 \rangle + \langle a_2^\dagger a_2 \rangle + 2 |\langle a_1^\dagger a_2 \rangle| \cos k(x_1 - x_2) = 2(1 + \cos k(x_1 - x_2)) |d|^2$$

\rightarrow Interferenzmuster sichtbar

3. Einzel-Photon Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger + a_2^\dagger) |0\rangle$$

$$I \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos k(x_1 - x_2)$$

\rightarrow Interferenzmuster sichtbar

$G^{(1)}(x_1, x_2)$ erlaubt es Interferenzmuster zu charakterisieren

