2. Elektronenflüssigkeiten: nichtlokalisierte, freibewegliche Elektronen

- im Gegensatz zu in isolierten atomaren Systemen, in denen die Elektronen räumlich lokalisiert sind, treten in Festkörpern (Metalle!) freibewegliche Elektronen auf

- Bewegungsgleichungen f. Elektronenflüssigkeit:

Strom in Maxwellgl. $\vec{j}(\vec{r},t) = n(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$

$n(\vec{r},t)$ Ladungsdichte, $\vec{v}(\vec{r},t)$ Geschwindigkeitsfeld

dazu sind 2 gekoppelte Gleichungen zu lösen:

Kontinuität: $\partial_t n = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v})$

Geschwindigkeit: $\partial_t \vec{v} = \underbrace{-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}}_{\text{nichtlinear}} + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

Lorentzkraftdichte

$\vec{E}, \vec{B}$ durch Maxwellgl. bestimmt

a) lineare Antwort

für kleine $\vec{v} \to 0$

$$\partial_t \vec{v} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) - \gamma\vec{v}$$

Drudemodell

Dämpfung (phänomenologisch)

b) nichtlineare Antwort (störungstheoretisch)

$$\vec v(t) = \underbrace{\vec v(\vec r, t=-\infty)}_{=0} + \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m}\left(\vec E(t') + \vec v(t') \times \vec B(t')\right) - \vec v(t') \cdot \vec\nabla\, \vec v(t') \right\}$$

<u>in 0-ter Ordnung</u>: [illegible] $E, B = 0$

$$\vec v^{(0)} = \vec v(-\infty) = 0$$

<u>in 1.-ter Ordnung</u>: $\vec v^{(0)}$ einsetzen rechts

$$\vec v^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\gamma(t-t')} \frac{q}{m} \vec E(t')$$

\# in FK

$$\dot{\vec v}^{(1)}(t) = -\gamma \vec v^{(1)}(t) + \frac{q}{m}\vec E(t)$$

Drude

<u>in 2.-ter Ordnung</u>: $\vec v^{(1)}$ und setze wieder ein

$$\vec v^{(2)}(t) = \vec v^{(1)}(t) + \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m} \vec v^{(1)}(t') \times \vec B(t') - \vec v^{(1)}(t') \cdot \vec\nabla\, \vec v^{(1)}(t') \right\}$$

$$\dot{\vec{v}}^{(2)}(t) = -\gamma\,\vec{v}^{(2)} + \frac{q}{m}\vec{E} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{v}^{(1)}\times\vec{B} - \vec{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v}^{(1)}}$$

mittlerer Anteil:

nur → Lichtkraft

ebene Welle:

$\vec{E}\times\vec{B}$ → Kraft in Ausbreitungsrichtung.

<u>optisches Feld:</u>

Vektor

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\,\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t)\,e^{-i\omega_L t} + \text{c.c.}$$

(analog f. $\vec{B}$-Feld), $\vec{B}$ durch $\vec{E}$ ausdrücken:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B},$$ mit lgs. Amplitudennäherung:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\tilde{E}\,e^{-i\omega_L t}} + \vec{\nabla}\times\tilde{E}^*\,e^{i\omega_L t} = \underbrace{i\omega_L\tilde{B}\,e^{-i\omega_L t}} - i\omega_L\tilde{B}^*\,e^{+i\omega_L t}$$

Trennung d. Frequenzen

$$i\omega_L\tilde{B} = \vec{\nabla}\times\tilde{E}, \quad -i\omega_L\tilde{B}^* = \vec{\nabla}\times\tilde{E}^*$$

$$\dot{\vec{v}}^{(2)}\Big|_{\text{mittlerer}} = \frac{q}{m}\vec{v}^{(1)}\times\vec{B} - \vec{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v}^{(1)}$$

Lösung v. $\vec{v}^{(1)}$

$$\dot{\vec{v}}^{(1)} = \frac{q}{m}\vec{E} \quad , \text{ in kpx. Amplitude}$$

$$-i\omega_L \tilde{v}^{(1)} e^{-i\omega_L t} + i\omega_L \tilde{v}^{*} e^{i\omega_L t} = \frac{q}{m}\left(\tilde{E} e^{-i\omega_L t} + \tilde{E}^{*} e^{i\omega_L t}\right)$$

$$\tilde{v}^{(1)} = i\frac{q}{m\omega_L}\tilde{E} \qquad \text{ohne Dämpfg. !}$$

$$\tilde{v}^{*(1)} = -i\frac{q}{m\omega_L}\tilde{E}^{*}$$

$-2, ?, 0$

$$v^{(2)}\Big|_{\text{mitteln}} = \sum_{n=-2}^{2} e^{i\omega_L n t}\, V_n^{(2)} \frac{1}{2}$$

jetzt nur optisch. gleichrichtg. such also Terme mit $n=0$

$$\boxed{v = \frac{\tilde{v}^{*}}{2} e^{i\omega_L t} + \frac{\tilde{v}}{2} e^{-i\omega_L t}}$$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}\Big|_{nl} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\Big(\underbrace{\tilde{v}^{(1)}\times\tilde{B}^{*}}_{} + \underbrace{\tilde{v}^{*(1)}\times\tilde{B}}_{c.c.}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\tilde{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\tilde{v}^{*(1)}}_{} + \underbrace{\tilde{v}^{*(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\tilde{v}^{(1)}}_{c.c.}\Big)$$

Maxwell ↓ ; durch $\tilde{v}^{*(1)}$ ausdrücke

$$\tilde{v}^{(1)}\times\tilde{B}^{*} = \tilde{v}^{(1)}\times\frac{(\vec{\nabla}\times\tilde{E}^{*})}{-i\omega_L} = \frac{1}{-i\omega_L}\tilde{v}^{(1)}\times\left(\vec{\nabla}\times\tilde{v}^{*(1)}\right)\cdot\frac{m\omega_L}{-iq}$$

$$= -\frac{m}{q}\,\tilde{v}^{(1)} \times \left(\vec{\nabla} \times \tilde{v}^{(1)*}\right) \ldots\ldots$$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}\Big/_{m} = -\frac{1}{2}\left(\tilde{v}^{(1)} \times \vec{\nabla} \times \tilde{v}_1^{*(1)} + \tilde{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}\, \tilde{v}^{(1)*} + c.c.\right)$$

es gilt:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)$$

$$\vec{a} = \tilde{v}^{(1)}, \quad b = \tilde{v}^{*(1)}$$

$$\dot{\tilde{V}}_0^{(2)}\Big/_{m} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\tilde{v}^{(1)}\cdot\tilde{v}^{*(1)}\right)$$

$$\dot{\tilde{V}}_0^{(2)}\Big/_{m} = -\vec{\nabla}\underbrace{\left(\frac{q^2}{2m^2\omega_L^2}\left|\tilde{E}(r,t)\right|^2\right)}_{\text{Kraft auf Teilchen}}$$

Bemerkung:

a) offensichtlich wirkt die Lichtintensität des eingestrahlten opt. Feldes als räumlich variables Potential: in Form einer Newtongleichung:

$$\dot{v} = \vec{f}_P = -\vec{\nabla}\,\phi_P$$

ponderomotive Kraft

ponderomotives Potential

$$\phi_p = \frac{q^2}{2m^2\omega_L} \left| \tilde{E}(\vec{r}_L t) \right|^2$$

b) Bewegungsprofil ist auf Newton-Mechanik zurückgeführt (f. Probeteilchen)

c) starke Dämpfung γ:

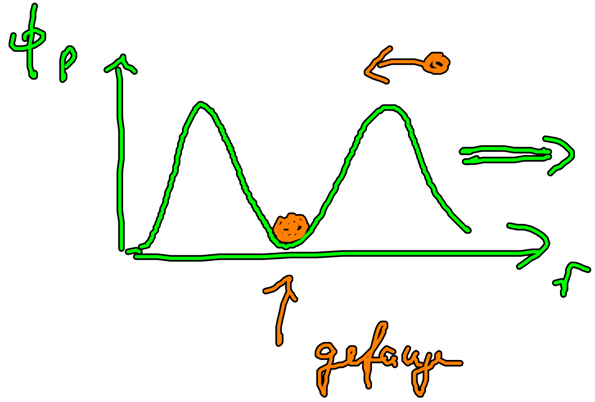
$$\cancel{\dot{\tilde{V}}_0^{(2)}} = \underbrace{-\gamma\, \tilde{V}_0^{(2)}}_{\text{dominant}} + \vec{f}_p$$

$$\tilde{V}_0^{(2)} \sim \vec{\nabla} \phi_p$$

$$\rightarrow \quad \tilde{V}_0^{(2)} = 0 \quad \text{f.} \quad \vec{\nabla} \phi_p = 0$$

an diesen Stellen verschwindet die Kraft.!

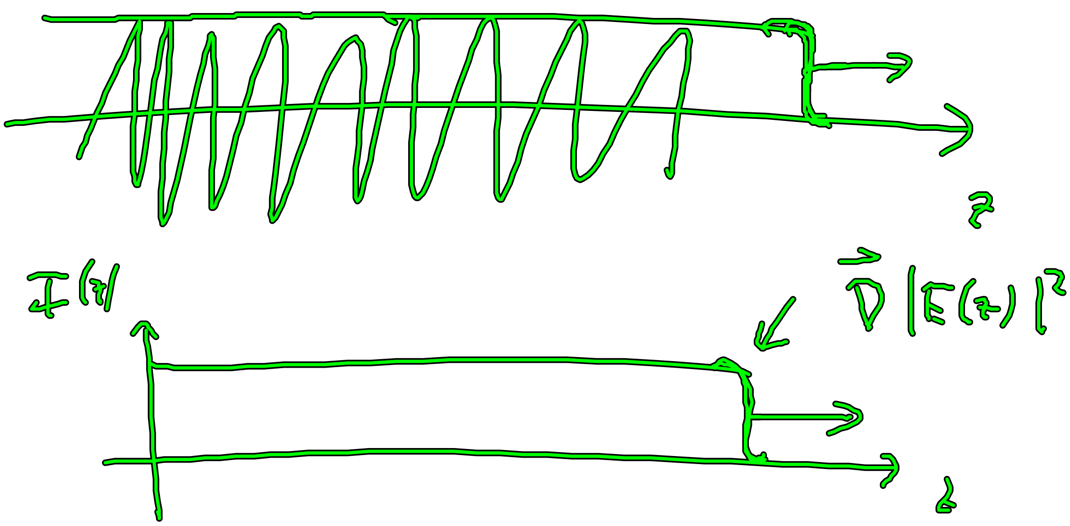
Probeteilchen sammeln sich in den Intensitätsminima an

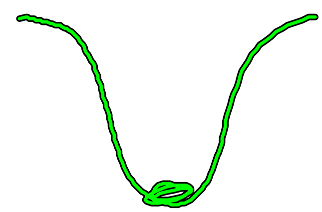


→ Bewegg. d. Lasers → optische Pinzette

d/ gilt auch f. polarisierbare Teilchen

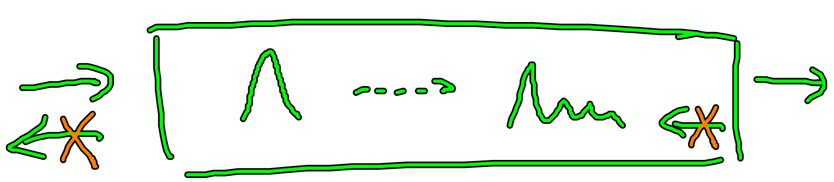
<u>ebene Welle</u>:





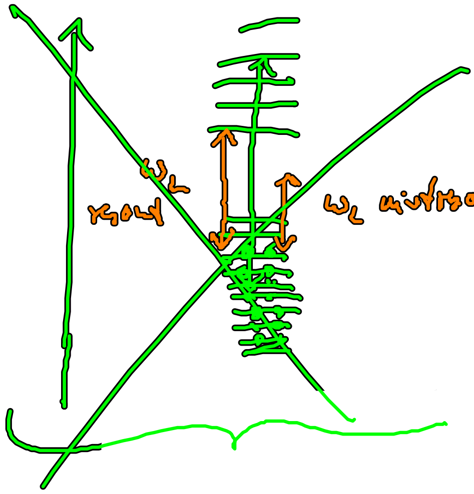
<u>VII</u> Lichtausbreitung in ausgedehnten Medien: Amplitudengleichg.

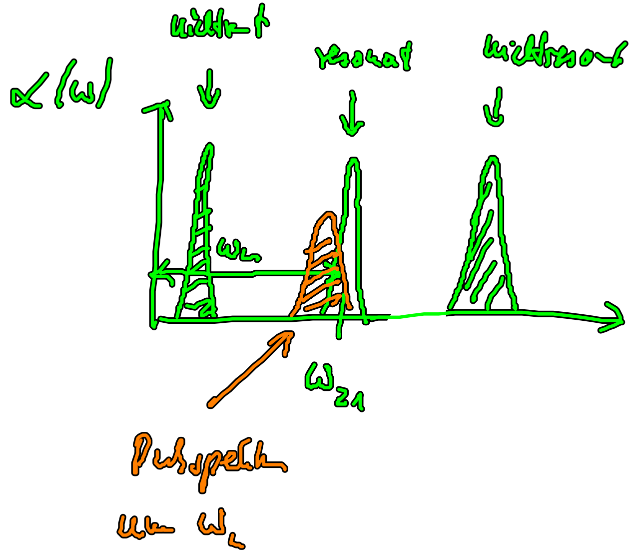
Vorwärtsbewegg. v. Lichtpulsen in Medien



ohne Reflexion, <u>nur</u> vorwärts laufende Wellen

Probe / Materie → optische Response



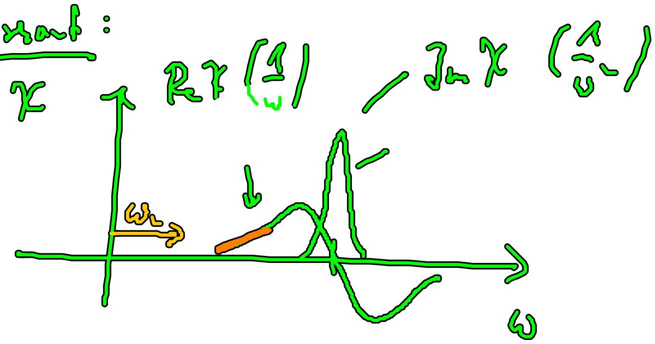


2 Arten v. Dipoldichte: $\vec{P} = \vec{P}_{nr} + \vec{P}_{res}$

$\omega_L \ll\gg \omega_{ij}$ $\qquad$ $\omega_L \approx \omega_{nm}$

Unterteilung in resonante Antwort u. nichtresonante Antwort

nichtresonant:



die nichtresonanten Übergänge werden d. Brechzahl n(ω) repräsentiert

resonant: Einschränkung auf 2NS

Herleitung d. Amplitudengleichung:

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \left(\vec{P}_{NL} + \vec{P}_{lin} \right)$$

$$\vec{P}_{lin} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega)$$, sei linear

$$\Delta \vec{E}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{NL}(\omega) - \mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$$\Delta \vec{E}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{\left(1 + \chi(\omega)\right)}_{n^2(\omega)} \vec{E}(\omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{NL}(\omega) \qquad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Def. d. Brechzahl: $1 + \chi(\omega) = n^2(\omega)$

in Analogie zu Gaußstrahl ähnliche Amplitudengleichg. ableiten

<u>Vakuum</u>: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}(\vec{r}, t) \, e^{-i\omega_L t + i k_L z}$ $\quad \omega_L = c k_L$

<u>Materie</u>: $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \tilde{E}(\vec{r}_\perp, z, \omega) \, e^{i k(\omega) z}$

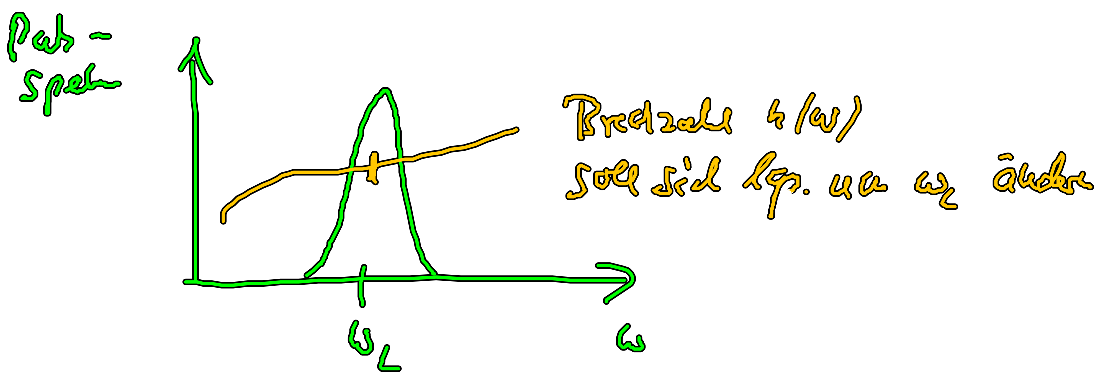
$k(\omega)$ ist noch zu bestimmen

Hilfsfunktion: $\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = f^2(\omega)$

in Wellengl. einsetzen: ∂_z^2 ausführen:

$$\Delta_\perp \tilde{E} + \cancel{\partial_z^2 \tilde{E}} + 2ik(\omega)\,\partial_z \tilde{E} - k^2(\omega)\,\tilde{E} + f^2(\omega)\,\tilde{E} = -\mu_0\,\omega^2\,\tilde{P}_{res}(\omega)$$

auch folgende, lgs. Amplitude, analyt. Ansatz f. $\vec{P}_{res}$.



Idee: $f(\omega)$ in Reihe um ω_L entwickeln

$$(f^2 - k^2) = (f-k)\underbrace{(f+k)}_{\substack{\text{etwa gleich} \\ \text{(im Vakuum exakt)}}} \approx (f-k)\,2k$$

Reihe ↓

$$= \Big(f(\omega_L) + f'(\omega_L)\underbrace{\Delta\omega}_{\omega-\omega_L} + \frac{1}{2} f''(\omega_L)\,\Delta\omega^2 - k(\omega)\Big)\,2k(\omega)$$

$k(\omega)$ wählen: $\quad k(\omega) \equiv f(\omega_L) = f_L$

$$f_L = \frac{n(\omega_L)\,\omega_L}{c} \equiv k_L$$ Wellenzahl der Welle im Medium

einsetzen in Wellengl. und auf $2ik(\omega) = 2ik_L$ dividieren

$$\Big(\underbrace{\frac{\Delta_\perp}{2ik_L}}_{\text{Gaußpuls aber mit konstanter Bandbreite } u\,(\omega_L)} + \partial_z \underbrace{- i k_L' \Delta\omega - \frac{i}{2} k_L'' \Delta\omega_L^2}_{\text{Korrektur f. Puls}}\Big)\tilde{E}(\omega) = \frac{i\mu_0\omega^2}{2k_L}\tilde{P}_{nl}(\omega)$$

Zurück in Zeitraum:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\Delta\omega t}\tilde{E}(t)$$

$$\tilde{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\Delta\omega t}\tilde{E}(\omega)$$

auf rechter Seite $\omega^2 \to \omega_L^2$

$$\Big(\frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \partial_z + k_L'\partial_t + \frac{i}{2}k_L''\partial_t^2\Big)\tilde{E}(\vec{r},t) = i\frac{k_L}{2n_L^2}\frac{\tilde{P}_{nl}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

Umformen auf rechter Seite: $\mu_0\frac{\omega_L^2}{k_L} = \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}}\frac{\omega_L^2}{k_L\varepsilon_0} = \frac{\omega_L^2}{c^2k_L^2}\frac{k_L}{\varepsilon_0} = \frac{1}{n_L^2}\frac{k_L}{\varepsilon_0}$