Zusammenfassung Amplituden-Gleichung f. Lichtausbreitung

(paraxiale Näherung)

$$\left(\partial_z + f_L' \partial_t + \frac{\Delta_\parallel}{2 i k_L} + \frac{i}{2} f_L'' \partial_t^2 \right) \hat{E}(z, \vec{r}_\parallel, t) = \frac{i k_L}{2 n_L^2} \frac{P_{RS}(z, \vec{r}_\parallel, t)}{\varepsilon_0}$$

$$f(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}$$

$$f(\omega_L) \equiv f_L = k_L$$

$$f'(\omega_L) = \partial_\omega \left(\frac{\omega n(\omega)}{c} \right) \Big|_{\omega = \omega_L} \equiv k_L'$$

die Transformation in mitbewegte Koordinaten

$$\zeta = z, \quad y = t - z f_L' = t - \frac{z}{v_g}, \quad f_L'^{-1} \equiv v_g$$

legt Interpretation als Gruppengeschwindigkeit nahe

(Bild unten)

$$n_L = n(\omega)\Big|_{\omega = \omega_L}$$

$$f_L'' = \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\frac{\omega n(\omega)}{c}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_L} \equiv k_L''$$

k_L'' wird Gruppengeschwindigkeitsdispersion genannt, und bestimmt die Dynamik eines auseinanderlaufenden Pulses

Amplitudengleichung in mitbewegten Koordinaten

$$\xi = z, \quad \eta = t - \frac{z}{v_g}, \quad f_L'' = k_L''$$

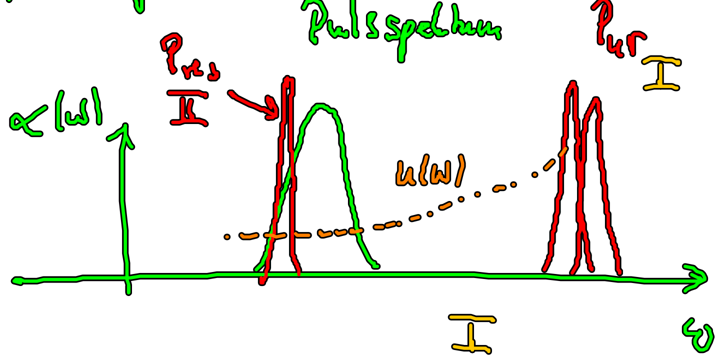
$$\left(\partial_\xi + \frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \frac{i}{2}k_L''\,\partial_\eta^2\right)\hat{E}(\xi,\eta) = \frac{i}{2\varepsilon_0}\frac{k_L}{n_L^2}\,\underset{\mathrm{II}}{\hat{P}_{res}(\xi,\eta)}$$

I

Ausbreitung eines Pulses in z-Richtg. mit Geschwindigkeit v_g

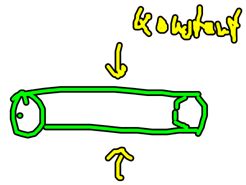
paraxiale Beugungseffekte

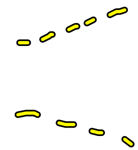
Korrektur zur mittleren Gruppengeschw., „Dispersion der Gruppengeschwindigkeit" (λ-Abhängigkeit)



VIII Lichtausbreitung in ausgedehnter Materie: Lineare Optik

1. Strahlen ohne Beugung





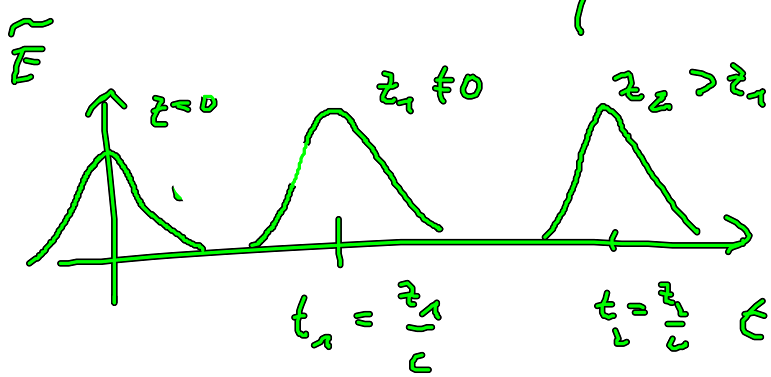
1.1. Gruppengeschwindigkeit / Dispersion

a) Gruppengeschwindigkeit (ohne Dispersion)

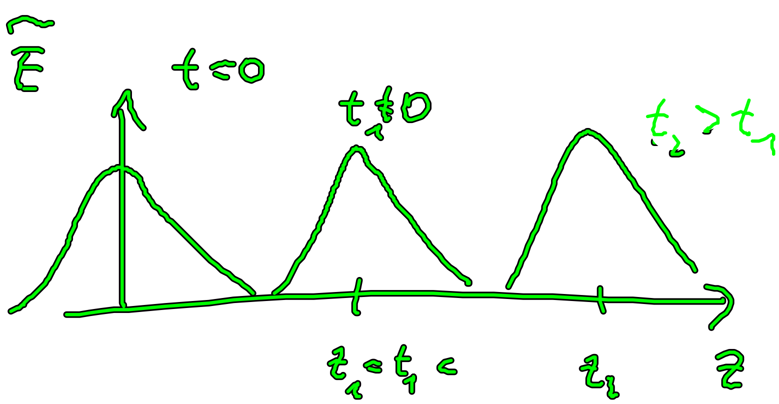
$$\partial_\xi \tilde{E}(\xi, \eta) = 0$$

jede Funktion mit $\tilde{E} = \tilde{E}(\eta)$ ist Lösung

$$\tilde{E}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)$$

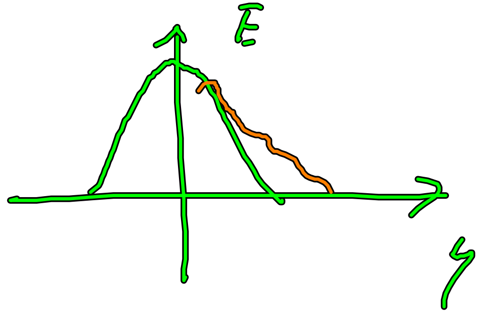


über Zeit



über Ort

später



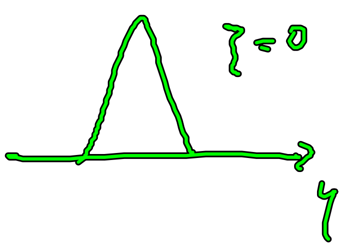
Sinnvoll korrekt im y-Plot anzustellen

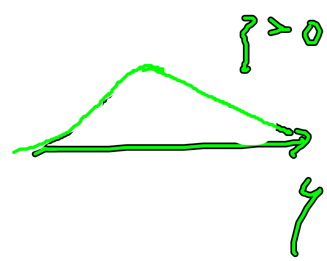
enthält „nichttriviale" Ausbreitungseffekte

b/ Gruppengeschwindigkeitsdispersion (Blatt 8)

$$\left(\partial_\xi + \frac{i}{2} k_2'' \partial_y^2 \right) \tilde{E}(\xi, y) = 0$$

analog Schrödingergleichung: $\partial_y^2 \to \partial_x^2$, $\partial_\xi \to \partial_t$





gute Annahme bei $\xi = 0$ einen Gaußschen Puls zu nehmen, da diese v. Laser zur Verfügung gestellt werden.

$$\tilde{E}(\xi = 0, y) = \frac{A_0}{2} e^{-g_0 y^2} e^{i\varphi(y)}$$

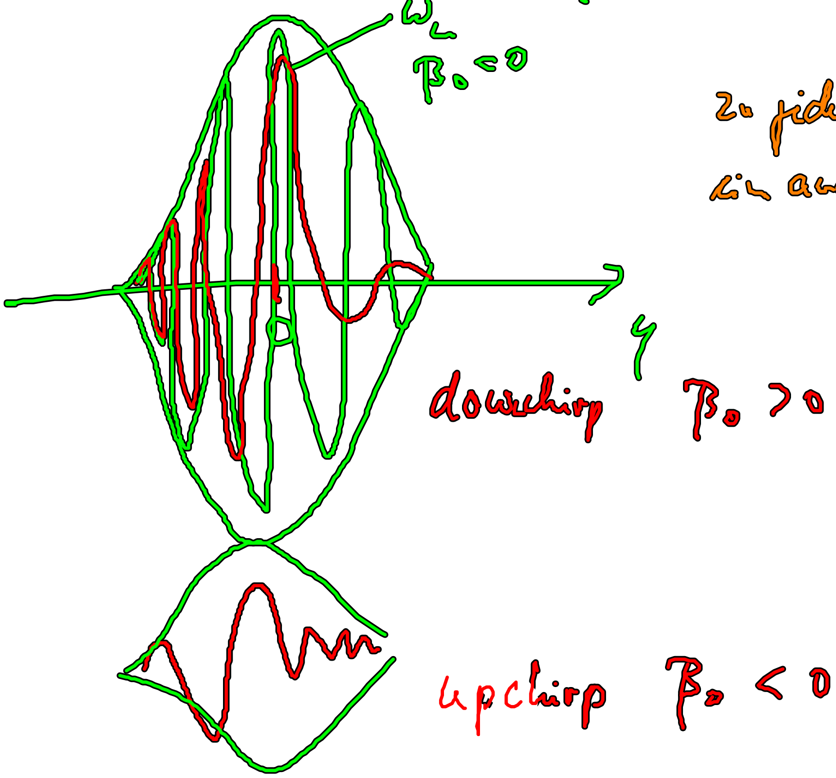
Amplitude Gauß Phasenmodulation „chirp"

einfachster Ansatz $\varphi = \beta_0 y^2$

Gesamtpuls $E = \tilde{E}\, e^{-i\omega_L y}$

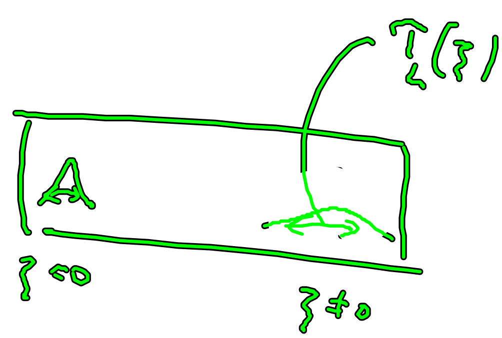
momentane Frequenz: $\frac{\partial}{\partial y}(\omega_L y) = \omega_L$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega_L y - \varphi(y)\right) = \omega_L - 2\beta_0 y$$



zu jedem Zeitpunkt eine andere Frequenz!

Bemerkungen zu Auswirkungen:



a) Pulse bleibt gaußförmig,

aber <u>Pulsdauer</u>:

$$T_L(\xi) = T_L(\xi=0)\cdot\left[1 + 2\beta_0 k_L'' L_D\left(1-\left[1-\frac{\xi}{L_D}\right]^2\right)\right]^{1/2}$$

$$L_D = -\frac{\beta_0}{2k_L''}\Big/\left(\beta_0^2+\gamma_0^2\right)$$ Dispersionslänge

b) kleine ξ: $T_L(\xi) \approx T_L(0)\left(1 + 2\beta_0 k_L'' \xi\right)$

$$\beta_0 \lessgtr 0$$

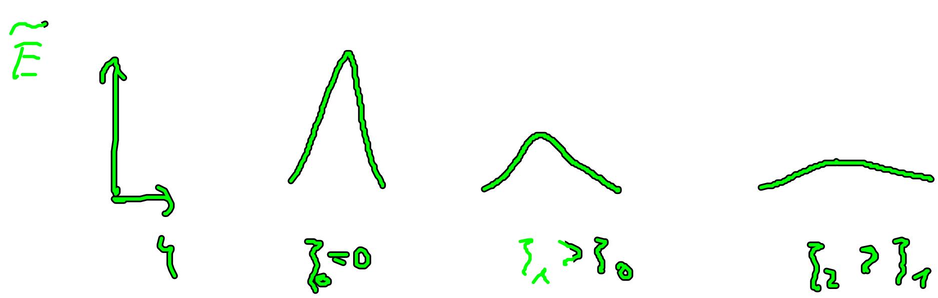
$$k_L'' \gtrless 0$$

$\beta_0 \cdot k_L'' > 0 \longrightarrow T_L$ verlängert

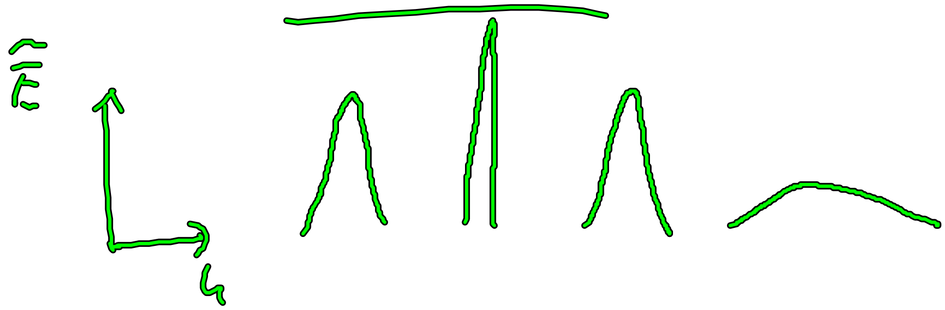
$\beta_0 \cdot k_L'' < 0 \longrightarrow T_L$ verkürzt

c) großes ξ: $T_L(\xi) \sim T_L(0)\cdot\xi \rightarrow T_L$ verlängert

d) insgesamt: $\underline{k_L''\cdot\beta_0 > 0}$



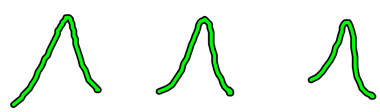
$$k_L^{''} \cdot \beta_0 < 0$$

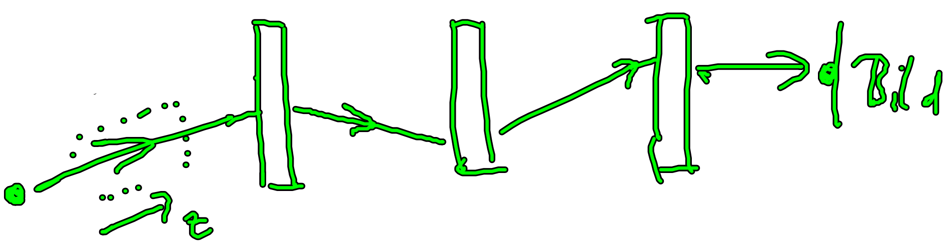


1.2. Paraxialer Strahlengang

ABCD - Transfermatrizen

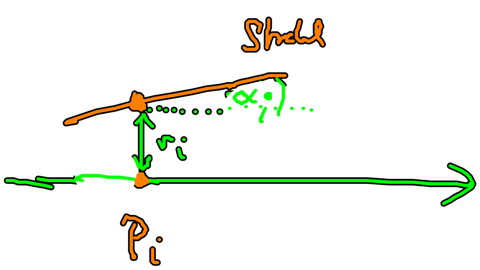
$$\frac{\partial}{\partial \xi} E(\xi, \tau) = 0$$





$\xi = z$ Achse wird i.a. durch optische Elemente verkippt

Zylindersymmetrie

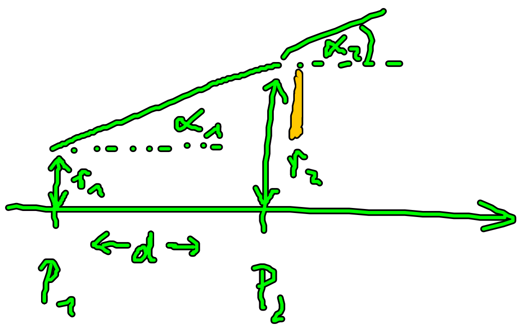


Achse f. paraxiale Optik

$\vec{S}_i = (r_i, \alpha_i)$, Abstand z. Achse

Winkel z. Achse

a/ Ausbreitg. in frei. Raum zwisch 2 Punkte



$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad (*)$$

$$r_2 = r_1 + \underleftarrow{tg\,\alpha_1 \cdot d}$$

$$\approx r_1 + \alpha_1 d$$

paraxiale Optik

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + d\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} (*)$$

$$\vec{S}_2 = \hat{T}_{FR} \, \vec{S}_1$$

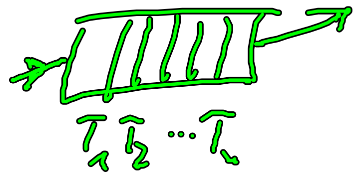
freier Raum

Transformmatrix f. freien Raum ist

$$\hat{T}_{FR} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verallgemeinert: alle optischen Elemente werden und $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ - Matrizen ausgedrückt

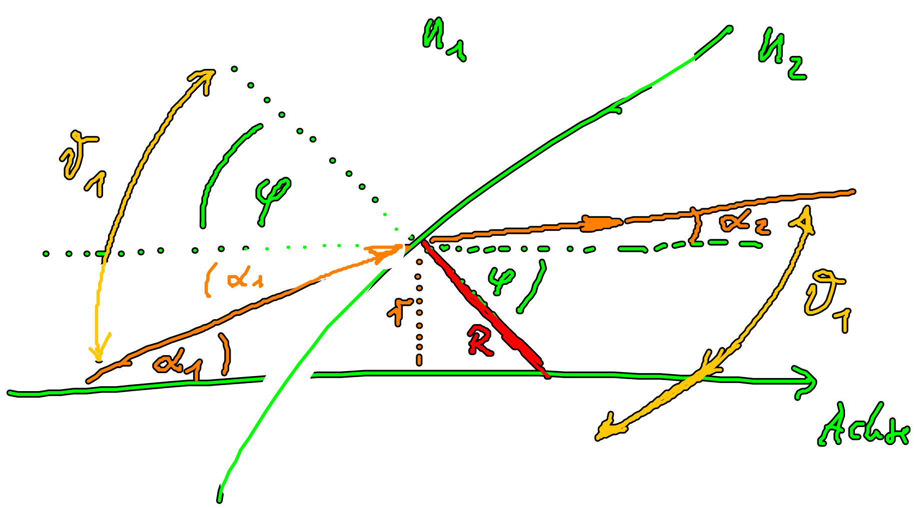
- alle Strahlgänge



werden d. Matrixmultiplikation berechnet

- verallgemeinerbar auf Gaußstrahlen (w_0, z_0)

b) brechende Oberfläche



R - Krümmungsradius

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

$r_1 = r_2$

Brechungsgesetz: $\sin\vartheta_1 \, n_1 = \sin\vartheta_2 \, n_2$

paraxial: $\vartheta_1 \, n_2 = \vartheta_2 \, n_2 \quad (*)$

über Sinus

$$\vartheta_1 = \varphi + \alpha_1 \approx \alpha_1 + \frac{r_1}{R}$$

$$\vartheta_2 = \varphi + \alpha_2 \approx \alpha_2 + \frac{r_1}{R}$$

$\vartheta_1 \, \vartheta_2$ in $(*)$ einsetzen und nach α_2 umstellen

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{r_1}{R}$$

$$r_2 = r_1$$

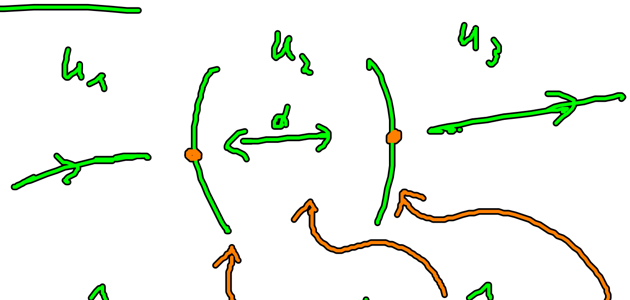
$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{\hat{T}_{BO}} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{T}_{BO}$ (brechende Oberfläche)

planare Oberfläche $R \to \infty$

$$\hat{T}_{PO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

c) Linse



$$\hat{T}_{Linse} = \hat{T}_{BO_1}\,\hat{T}_{FR}\,\hat{T}_{BO_2}$$

dünne Linse $\frac{d}{R_1}, \frac{d}{R_2} \to 0$

$$f^{-1} = -(n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

f - Brennweite $n_1 = 1$
$n_2 = n$
$n_3 = 1$

2. Wechselwirkung mit einer resonanten Dipoldichte

$$\partial_z \tilde{E} = \frac{i k_L}{2 k_L^2} \frac{\tilde{P}_{res}}{\varepsilon_0}$$

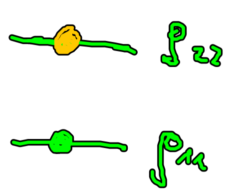
$\tilde{P}_{res}$: Zweiniveausystem in linearer Optik

$$\underbrace{\tilde{P}_{res} = d_{12}}_{\text{Dipolmoment}} \underbrace{\tilde{\rho}_{12}}_{\text{Dichtematrix}} \underbrace{n_0}_{\text{Teilchendichte}}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12} = i \underbrace{\tilde{\Omega}_{21}}_{\text{Rabifrequenz}} \underbrace{\Delta}_{\text{Inversion}} - \gamma \tilde{\rho}_{12}$$

(exakte Resonanz $\omega_L = \omega_{21}$)

$\Delta(t) \approx \Delta_0$ ist unverändert in linearer Optik = konstant



Frequenzraum: $\qquad \hat{\Omega}_{21} \equiv \hat{\Omega}$

$$\partial_\xi \tilde{\hat{E}} = \frac{i k_L}{2 n_L^2 \varepsilon_0} n_0 d_{12} \hat{\rho}_{12} \qquad \left(\hat{\rho}_{12}(\Delta\omega) \right)$$

$$-i\Delta\omega\, \hat{\rho}_{12} = -\gamma \hat{\rho}_{12} + i \hat{\Omega} \Delta_0 \qquad \left(\hat{\Omega}(\Delta\omega) \right)$$

$(\omega - \omega_L)$

$$\hat{\rho}_{12} = \frac{i \hat{\Omega} \Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega}$$

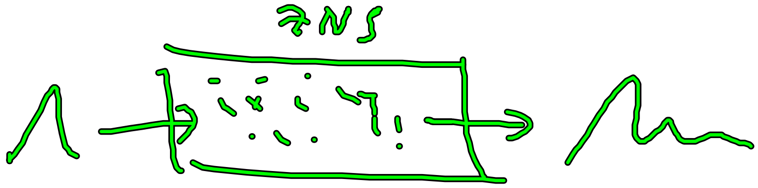
einsetzen in Wellengleichung f. $\hat{E} \to \hat{\Omega} = \frac{d_{21} \hat{E}}{\hbar}$

$$\partial_\xi \hat{\Omega} = i\alpha \tilde{\hat{\rho}}_{12}, \quad \alpha = \frac{k_L n_0 |d_{12}|^2}{2 n_L^2 \hbar \varepsilon_0}$$

$$\partial_\xi \hat{\Omega} = -\frac{\alpha \hat{\Omega} \Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega}$$

$$\boxed{\tilde{\hat{\Omega}}(\xi, \Delta\omega) = e^{-\frac{\alpha \Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega}\xi}\, \hat{\Omega}(\xi = 0, \Delta\omega)}$$

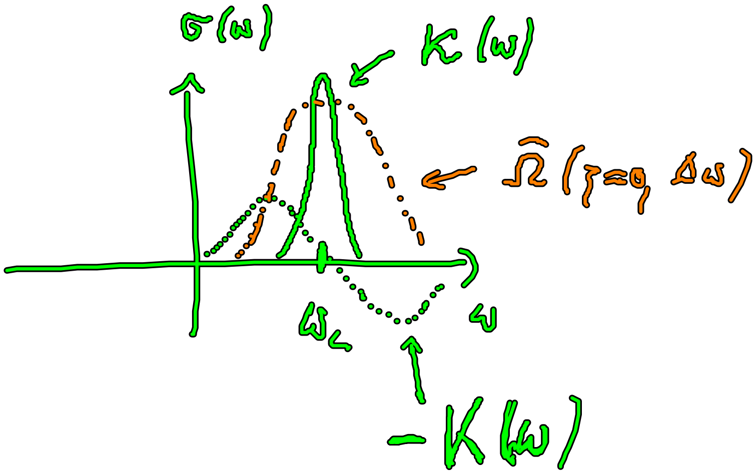
ZNS



Lösung der Ausbreitung d. Ensembles v. ZNS ist: $\leftarrow$ Streuquerschnitt

$$\tilde{\hat{\Omega}}(\xi, \Delta\omega) = \Omega(\xi = 0, \Delta\omega)\, e^{-\frac{\sigma(\omega)}{2}\xi}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{2\alpha\Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega} = 2\alpha\Delta_0 \frac{\gamma + i\Delta\omega}{\gamma^2 + \Delta\omega^2} = \underbrace{\kappa(\omega)}_{\text{Absorption}} + i \underbrace{K(\omega)}_{\text{Brechzahl}}$$



Bemerkung:

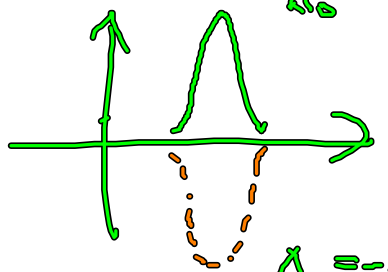
a) $$\kappa(\omega) = \frac{2\alpha\Delta_0\gamma}{\gamma^2 + \Delta\omega^2}$$

ist ein Meßgröße Absorptionslänge ← messen

$$\underline{\underline{\kappa(\omega)}} = -\frac{1}{z} \ln \frac{|\tilde{\Omega}(z,\Delta\omega)|^2}{|\tilde{\Omega}(z=0,\Delta\omega)|^2}$$

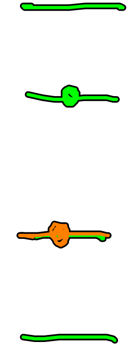
materialspezifisch ↑ messen

b) $K(\omega)$

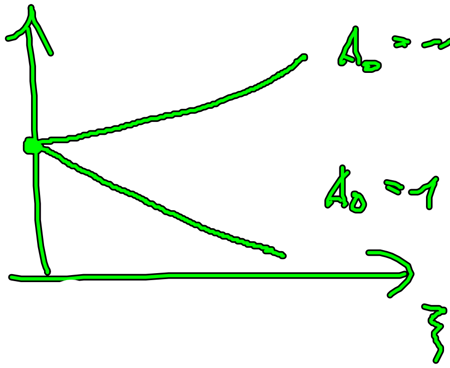


$\Delta_0 = 1$ $\rho_{11} = 1,\ \rho_{22} = 0$

$\Delta_0 = -1$ $\rho_{11} = 0,\ \rho_{22} = 1$



$\tilde{\Omega}(\xi, \Delta\omega)$ „fest"



$\Delta_0 = -1$ Verstärkung

$\Delta_0 = 1$ Absorption

Lambert-Beer f. Frequenz