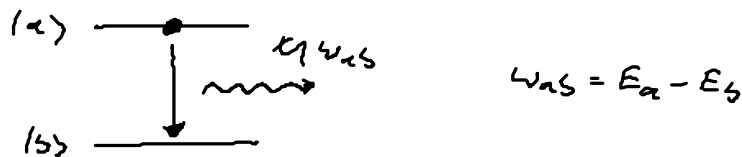


5.2 Wigner-Weisskopf Theorie zur spontanen Emission

Modell: Zwei-Niveau System gekoppelt an ein Kontinuum von elektromagnetischen Feldmoden

Annahme: Atom ist initial in angeregtem Zustand, Feld im Vakuum



Ziel: Zeitentwicklung der Wellenfunktion, Langzeitverhalten für $t \rightarrow \infty$

Hamiltonoperator in W-Bild

$$H_{\pm} = \epsilon_1 \sum_{k,\lambda} g_{k,\lambda} \left(\sigma_{\pm} + \frac{a_{k,\lambda}}{\epsilon_1} \right) e^{i(\omega_{ab} - \omega_{k,\lambda})t} + H_{\pm,0}$$

Zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\epsilon_1 \partial_t |\psi(t)\rangle = H_{\pm} |\psi(t)\rangle$$

$$\text{Anfangsbedingung } |\psi(t=0)\rangle = |a\rangle |0\rangle = |a; 0\rangle$$

Ausatz für zeitabhängige Wellenfunktion

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{k,\lambda} c_{s,k,\lambda}(t) |s, 1_{k,\lambda}\rangle$$

\hookrightarrow Atom im angeregten Zustand, Feld im Vakuum

\hookrightarrow Atom im Grundzustand ein Photon im Feld

Ausgangspunkt der Anfangsbedingung

$$c_a(t=0) = 1 \quad c_{s,k,\lambda}(t=0) = 0$$

Einsubstitutieren von (2) in (1)

$$i\epsilon_1 \left\{ \dot{c}_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{k,\lambda} \dot{c}_{s,k,\lambda}(t) |s, 1_{k,\lambda}\rangle \right\}$$

$$= t_1 \sum_{\vec{k}\lambda} \left\{ \hat{p}_{\vec{k}\lambda}^+ \tau_+ \alpha_{\vec{k}\lambda} e^{i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t} + \hat{p}_{\vec{k}\lambda} \tau_- \alpha_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t} \right\} \\ \times \left\{ c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}\lambda} c_{S, \vec{k}\lambda}(t) |S, 1_{\vec{k}\lambda}\rangle \right\} \\ = t_1 \sum_{\vec{k}\lambda} \left\{ c_a(t) \hat{p}_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t} |S, 1_{\vec{k}\lambda}\rangle + \hat{p}_{\vec{k}\lambda} c_{S, \vec{k}\lambda}(t) e^{+i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t} |a, 0\rangle \right\}$$

Projektion mit $\langle a, 0 |$

$$\rightarrow i\hbar \dot{c}_a(t) = \hbar \sum_{\vec{k}\lambda} \hat{p}_{\vec{k}\lambda}^+ e^{+i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t} c_{S, \vec{k}\lambda}(t) \quad (3)$$

Projektion mit $\langle S, 1_{\vec{k}\lambda} |$

$$i\hbar \dot{c}_{S, \vec{k}\lambda}(t) = \hbar \hat{p}_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t} c_a(t) \quad (4)$$

Differentiation von (4)

$$c_{S, \vec{k}\lambda}(t) = -i \hat{p}_{\vec{k}\lambda} \int_0^t e^{-i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})t'} c_a(t') dt'$$

Einsetzen in (3)

$$\dot{c}_a(t) = - \sum_{\vec{k}\lambda} |\hat{p}_{\vec{k}\lambda}|^2 \int_0^t c_a(t') e^{i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})(t-t')} dt'$$

Kontinuierlicher Limit für 4-Summe

$$\sum_{\vec{k}\lambda} \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{\omega_0} \omega^2 d\omega$$

"unendliche" Energie \rightarrow später: cut-off

$$|\hat{p}_{\vec{k}\lambda}|^2 = \frac{\omega_{\vec{k}\lambda}^2}{2\epsilon_0 V} \cos^2\theta |\langle a | \vec{r} | S \rangle|^2$$

\hat{C} Dipolmatrixelemente

Einsetzen

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{4 |\langle a | \vec{r} | S \rangle|^2}{(2\pi)^2 6\epsilon_0 \epsilon_0 c^3} \int_0^{\omega_0} \omega^3 d\omega \int_0^t c_a(t') e^{i(\omega_{1S} - \omega_{k\lambda})(t-t')} dt'$$

Markov-Limit

$$\int_0^t c_a(t') \dots dt' = c_a(t) \int_0^t \dots dt' \\ \approx c_a(t) \text{ für } \omega_{1S} \text{ - veränderlich, } c_a(t')$$



Längstlims

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{i(\omega_{ab} - \omega_k)(t-t')} dt' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_{ab} - \omega_k)t}{\omega_{ab} - \omega_k} + \frac{1 - \cos(\omega_{ab} - \omega_k)t}{i(\omega_{ab} - \omega_k)t}$$

$$= \pi \delta(\omega_{ab} - \omega_k) - i \mathcal{P} \frac{1}{\omega_{ab} - \omega_k}$$

Cauchy Hauptwert
"Principal value"

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{4 |\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2}{(2\pi)^3 \epsilon_0 c^3} \left[\int_0^{\infty} \omega_k^3 \pi \delta(\omega_{ab} - \omega_k) d\omega_k - i \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega_k}{\omega_{ab} - \omega_k} d\omega_k \right] \cdot c_a(t)$$

ohne
Lamb-
shift

Imaginärteil sagt für
Frequenz shift \approx Lamb-Shift

Integral divergiert: QED Renormierung
führt zu endlichem Wert $\hat{=}$ ut off $\int_0^{\infty} \omega^2$

$$= - \frac{1}{2} \frac{|\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \omega_{ab}^3 \cdot c_a(t)$$

$$= - \frac{1}{2} A c_a(t)$$

$$A = \frac{|\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2 \omega_{ab}^3}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

Einstein A Koeffizient für spontane
Emission

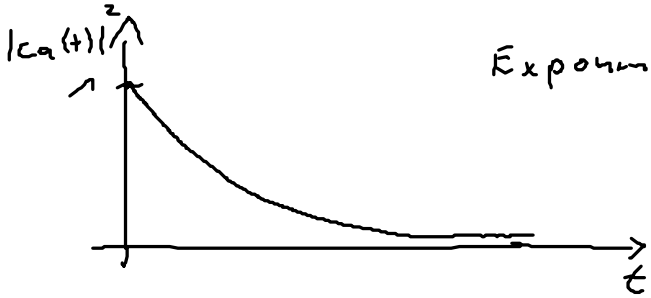
Lösung der DGL

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{1}{2} A c_a(t) \quad ; \quad c_a(t) = e^{-\frac{A}{2} t}$$

Population des angeregten At.-niveaus

$$p_a(t) = |c_a(t)|^2 = e^{-A t}$$

Exponentieller Zerfall der Population mit Rate A



Lebensdauer: $\tau = \frac{1}{A}$

Beispiel: Übergang $2P \rightarrow 1S$ von atomarem Wasserstoff

$\Delta E = \frac{1}{A} \approx 1.6 \text{ ns}$ Lebensdauer des $2P$ Zustands

$\Delta \lambda = c \cdot \Delta \tau \approx 48 \text{ cm}$ "Länge des kritischen Lichtpuls"

Lösung für $c_a(t)$ in Gl. (3) einsetzen

$$c_{5/2}(t) = -i g_{5/2} \int_0^t e^{-i(\omega_{5/2} - \omega_{4/2})t' - \frac{A}{2}t'} dt'$$

$$= g_{5/2} \frac{1 - e^{-i(\omega_{5/2} - \omega_{4/2}) - \frac{A}{2}t}}{(\omega_{4/2} - \omega_{5/2}) + i \frac{A}{2}}$$

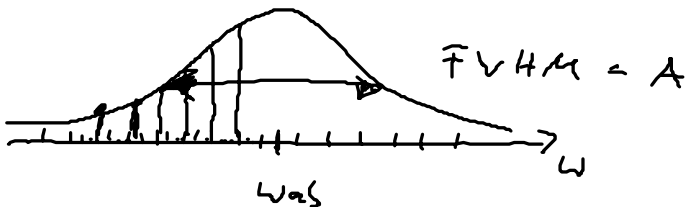
$\delta = \omega_{4/2} - \omega_{5/2}$

Population der Feldnoten (At. im Grundzustand)

$$P_{5/2}(t) = |c_{5/2}(t)|^2 = \frac{|g_{5/2}|^2}{(\omega_{4/2} - \omega_{5/2})^2 + \frac{A^2}{4}} (1 - e^{-A t} (1 - e^{i\delta t} + e^{-i\delta t}))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{5/2}(t) = \frac{|g_{5/2}|^2}{(\omega_{4/2} - \omega_{5/2})^2 + \frac{A^2}{4}}$$

Linien-Profil
 natürliche Linienbreite
 des atomaren Übergangs



Anderer Ansatz zur Linienverbreiterung

- Dopplerverbreiterung

Annahme: Atome haben Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeitsverteilung

Dopplerverbreiterung führt zu Linienverbreiterung -> Gauß-Profile

$$P(f) = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT f_0}} \exp\left[-\frac{mc(f-f_0)^2}{2kT f_0}\right]$$

- Druck / Stoßverbreiterung: führt ebenfalls zu Linienprofil

Zusammenfassung: Lösung der TOSE im Wigner-Wickskopf Modell

$$|\psi(t)\rangle = e^{-A/2t} |\alpha, 0\rangle + \sum_{kx} g_{kx} e^{-ik\vec{r}_0} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{kx} - \omega_{kx})t - A/2t}}{\omega_{kx} - \omega_{kx} + iA/2} \right] |\beta, 1_{kx}\rangle$$

(Position des Atoms)

Limit $t \rightarrow \infty$

$$|\beta\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)\rangle = \sum_{kx} g_{kx} \frac{e^{-ik\vec{r}_0}}{\omega_{kx} - \omega_{kx} + iA/2} |\beta, 1_{kx}\rangle$$

Detectierbare Photon-Intensität

$$I(r,t) = G^{(1)}(r,t; r,t) = \langle \psi | E^-(r,t) E^+(r,t) | \psi \rangle$$

$$= \sum_f \langle \psi | E^-(r,t) | f \rangle \langle f | E^+(r,t) | \psi \rangle$$

← Maximal 1 Photon im Zustand

↑ nur bekannte Zustände trifft bei

$$= \underbrace{\langle \psi | E^-(r,t) | 0 \rangle}_{\chi^*(r,t)} \underbrace{\langle 0 | E^+(r,t) | \psi \rangle}_{\chi(r,t)}$$

"Photon-Korrelationsfunktion"

$$= \chi^*(r,t) \chi(r,t) = |\chi(r,t)|^2$$

Intensität für $t \rightarrow \infty$, $|\psi(t)\rangle \rightarrow |\beta\rangle$

$$I(r,t) = \langle \beta | E^-(r,t) | 0 \rangle \langle 0 | E^+(r,t) | \beta \rangle$$

$$\langle 0 | E^+(r, t) | g \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\substack{k, \lambda \\ \lambda, \lambda'}} \langle 0 | \omega_k a_{k, \lambda} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.} | 1_{k, \lambda} \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{k, \lambda} \omega_k g_{k, \lambda} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \frac{1}{\omega_k - \omega_{ns} + i\Gamma/2}$$

↓ k-Integration

$$= \frac{\omega_{ns} \langle \alpha | \rho | \beta \rangle \sin k}{4\pi \epsilon_0 c^2 (r-r_0)} \Theta\left(t - \frac{r-r_0}{c}\right) e^{-i\left(t - \frac{r-r_0}{c}\right)(\omega - i\frac{\Gamma}{2})}$$

E_0

$$I(r, t) = \frac{|E_0|^2}{(r-r_0)^2} \Theta\left(t - \frac{r-r_0}{c}\right) e^{-\Gamma\left(t - \frac{r-r_0}{c}\right)}$$

