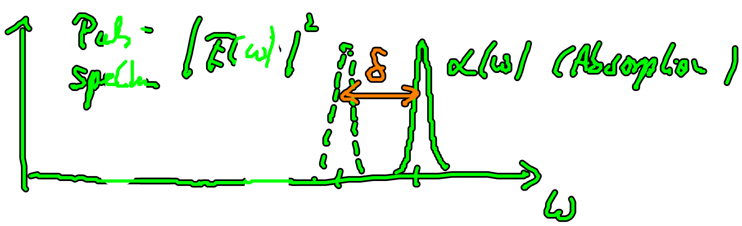
2. Kerreffekt

2.1. Selbstphasenmodulation

Kerrnichtlinearität $\tilde{P}_{NL} = i\alpha_K |\tilde{E}(\vec{r},t)|^2 \tilde{E}(\vec{r},t)$

- imaginär, 3. Ordng. in Feld, $\alpha_K > 0$ i.a.
- Nichtlinearität folgt dem Feld
- Ableitung im Kapitel zu schwach nicht-resonanten Nichtlinearitäten:



$$\tilde{P}_{NL} = n_0 d_{12} \tilde{\rho}_{12} \quad , \quad \tilde{\rho}_{12} = -\frac{1}{2\delta^3} |\tilde{\Omega}(r,t)|^2 \tilde{\Omega}(r,t)$$

(in VL abgeleitet)

zugehörige Wellengleichung:

$$\Big(\underbrace{\partial_\xi}_{\substack{\text{Ausbreitg.}\\ \text{in z-Richtg.}\\ \text{mit } v_L}} + \underbrace{\frac{\Delta_\perp}{2ik_L}}_{\text{Beugung}} + \underbrace{\frac{i}{2}k_L''\partial_\eta^2}_{\substack{\text{Gruppengeschw.-}\\ \text{Dispersion}}}\Big)\tilde{\Omega}(z,\vec{r}_\perp,t) = \underbrace{i\frac{k_L\, n_0 (d_\perp)^2}{2 n_L^2 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{\delta^3}\right)|\tilde{\Omega}|^2}\tilde{\Omega}$$

$$\equiv i k_L \underbrace{\frac{\Delta n}{n_L}}_{\substack{\text{relative Brechzahl-}\\ \text{änderung:}}} \tilde{\Omega}(z,\vec{r}_\perp,t)$$

$$=$$

$$\Delta n \equiv n_2 \left|\tilde{E}(z,\vec{r}_\perp,t)\right|^2$$

Koeffizient d. Kerrnichtlinearität

und quadrat.

E-Feld

Sinnhaftigkeit Δn-Interpretation zu zeigen

$\longrightarrow$ intensitätsabhängige Brechzahl

<u>zur Interpretation</u> $\Delta_\perp,\ \partial_\eta^2 \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{\Omega} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L}\tilde{\Omega}$$

wenn Δn nicht vom Ort ξ abhängt, so:

$$\tilde{\Omega}(\zeta, y) = \tilde{\Omega}(\zeta=0, y)\, e^{i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \zeta}$$, volle Felder:

$$\Omega(\zeta, y) = \underset{\left(e^{-i\omega_L y}\right)}{\Omega(\zeta=0, y)}\, e^{i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \zeta}\, e^{i k_L \zeta}$$

$$= \Omega(\zeta=0, y)\, e^{i k_L \left(1 + \frac{\Delta n}{n_L}\right)\zeta} \qquad \zeta = z$$

$$= \Omega(z=0, y)\, \underbrace{e^{i \frac{\omega_L n_L}{c}\left(1 + \frac{\Delta n}{n_L}\right)\zeta}}_{e^{i \frac{\omega_L}{c}\underbrace{\left(n_L + \Delta n\right)}\zeta}}$$

n_L: Brechzahl wird durch

Δn der intensitätsabh. Brechungsindex korrigiert

$$n_{neu} = n_L + n_2 |\tilde{E}|^2$$

Durch d. Kerreffekt wird Brechzahl d. Mediums proportional zu $|\tilde{E}|^2$ moduliert.

prinzipielle Diskussion z. Folge:

a) Δn ist wirklich ξ unabhängig:

$$\partial_\xi \hat{\tilde{\Omega}} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \hat{\tilde{\Omega}} \quad \Big| \cdot \hat{\tilde{\Omega}}^*$$

$$\partial_\xi \hat{\tilde{\Omega}}^* = -i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \hat{\tilde{\Omega}}^* \quad \Big| \, \hat{\tilde{\Omega}} \cdot$$

$$\Sigma : \quad \frac{\partial}{\partial \xi} |\hat{\tilde{\Omega}}|^2 = \underline{\underline{0}} \quad \rightarrow \quad \text{damit } |\hat{\tilde{\Omega}}|^2 = |\hat{\tilde{\Omega}}|^2(\xi=0, \vec{r}_{\perp}, \tau)$$

$$\left(\Delta n = n_2 |\tilde{E}|^2 \sim |\hat{\tilde{\Omega}}|^2 \right)$$

Die Kerr NL verändert nicht die Amplitude über ξ.

b) gekoppelte Amplitude - Phasengleichung

$\hat{\tilde{\Omega}} = A e^{i\phi}$; A, ϕ reell,

$\partial_\xi \hat{\tilde{\Omega}} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \hat{\tilde{\Omega}}$, einsetzen

$$(\partial_\xi A) e^{i\phi} + i (\partial_\xi \phi) A e^{i\phi} = i k_L \frac{\Delta n (A^2)}{n_L} A e^{i\phi}$$

Realteil: $\partial_\xi A = 0$

Integriert: $\partial_\zeta \phi = k_L \frac{\Delta n}{n_L}$

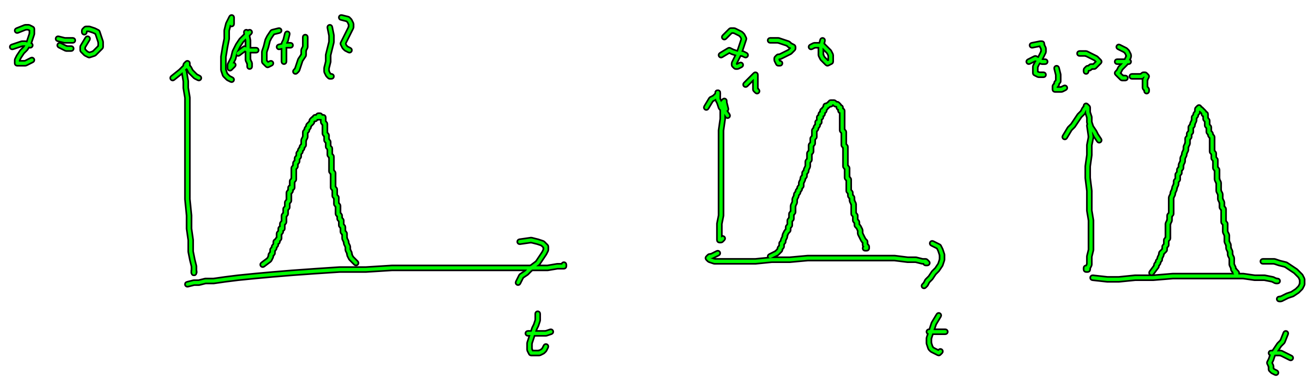
$$\Rightarrow \phi = \int_0^\zeta d\zeta' \; k_L \frac{n_2 |\tilde{E}(\zeta=0, \vec{r}_\perp, \tau)|^2}{n_L}$$

$$= k_L \frac{n_2}{n_L} |\tilde{E}(\zeta=0, \vec{r}_\perp, \tau)|^2 \, \zeta$$

Das Licht moduliert während der Ausbreitung in ζ seine Phase durch die eigene Intensitätsverteilung $|\tilde{E}|^2$.

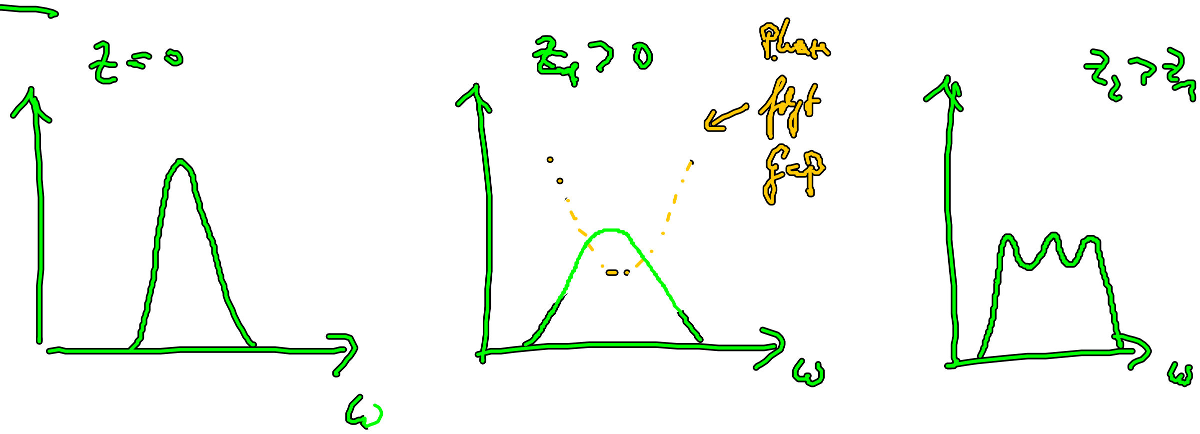
c) spektrales und zeitl. Verhalten

zeitlich bleibt die Intensität konstant bei variiertem z :



zeitlich konstant

Spektral



2.2. Selbstfokussierung

Strahl, stationär, $\partial_t^2 \to 0$, $\Delta_\perp \neq 0$: Beugg.!

$$\left(i2k_L\partial_z + \Delta_\perp\right)\tilde{E} = -2k_L^2 \frac{\Delta n}{n_L}\tilde{E}$$

$$\Delta n = n_2|\tilde{E}|^2$$

$\tilde{E} = A e^{i\phi}$ Ansatz, $\Delta_\perp = \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\nabla}_\perp$, trenne Re, Im:

$$k_L \partial_z A^2 = -\vec{\nabla}_\perp \cdot \left(A^2 \vec{\nabla}_\perp \phi\right)$$ Amplitudengleichung

$$\Rightarrow \partial_z \phi + \frac{1}{2k_L}\left(\vec{\nabla}_\perp \phi\right)^2 - \frac{k_L}{2}\left(\frac{\Delta_\perp A}{k_L^2 A} + 2\frac{\Delta n}{n_L}\right) = 0$$ Phasengleichung

= „von oben", Rest ist Beugung

$\Longrightarrow$ ähnelt einer Hamilton-Jacobi Glchg.

$$\partial_t S + H(\underbrace{\vec{\nabla}_q S}_{\vec{p}\,\hat{=}}, t) = 0$$

Wirkungsfunktion	S	$\longleftrightarrow$	ϕ
Zeit	t	$\longleftrightarrow$	z
Teilchenbahn	$\vec{q}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{r}_\perp$
Masse	m	$\longleftrightarrow$	k_L
Potential	V	$\longleftrightarrow$	$-\frac{k_L}{2}\left(\frac{\Delta_\perp A}{k_L^2 A} + 2\frac{\Delta n}{n_L}\right)$

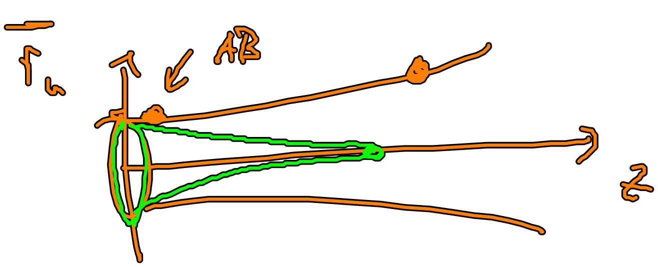
$\vec{r}_\perp = \vec{r}_\perp(z)$

$\vec{q} = \vec{q}(t)$

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{k_L}_{\hat{=}\, m} \frac{d^2 r_\perp}{d\underbrace{z}_{\hat{=}\, t}^2} = -\frac{\partial}{\partial r_\perp} V}$$

Bewegungsglchg. $\vec{r}_\perp = \vec{r}_\perp(z)$

$\hat{=}$ Strahlengleichung, „Trajektorie"



Potential V enthält Beugung ($\Delta_\perp$) und Kerreffekt (Δn)

beide gemeinsam legen fest, wie sich Strahl bewegt.

→ viele Szenarien, greifen nur 1. heraus

Ansatz f. Selbstfokussierung

$A(z, r_\perp)$ zylindrische Abhängigkeiten

$$= A_0 \frac{a_0^2}{a^2(z)} e^{-\frac{r^2}{2a^2(z)}}$$

Konstante

- Gaußstrahl mit z-abhängiger Breite

  wie verändert sich $a = a(z)$ mit zunehmendem z?

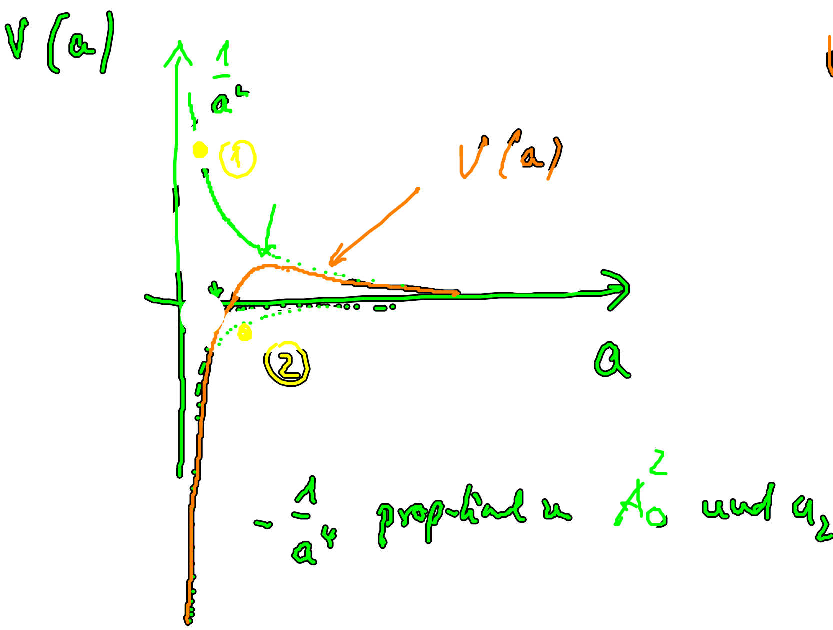
- einsetzen in V:

$$V = -k_L \left(-\frac{1}{k_L^2 a^2} + \frac{r^2}{2k^2 a^4} + \frac{\Delta n}{n_L} \right)$$

$$= -K_L \left(-\underbrace{\frac{1}{K_L^2 a^2}}_{1} + \frac{r^2}{2k^2 a^4} + \underbrace{\frac{n_2 A_0^2}{n_L}}_{2} \frac{a_0^4}{a^4} \right)$$

Sehen uns kleine r an: $\frac{r^2}{2k^2 a^4} \rightarrow 0$

und dann V als Funktion von V(a) diskutieren



V(a) realisiert die Bewegung

a(t) analog r(t)

(1) ohne Kerreffekt → Trajektorie so, daß $a \rightarrow \infty$

→ unendlich Defokussierung.

(2) ohne Beugung → Trajektorie so, daß $a \rightarrow 0$

→ unendliche Fokussierung

(3) mit Kerr + Beugung $\exists$ beide Lösungen, sind aber v. AB abhängig

beide Mgl. existieren,

inklusive instabiler Lösungen

$$\left(r = r_4 \right)$$