2.3. Kerreffekt und Solitonenlösungen in Fasern

Wellengleichung f. Amplituden $\tilde{E}(z, \vec{r}_\perp, t) \to \tilde{E}(\xi, \vec{r}_\perp, \eta)$

$$\Big(\partial_\xi + \underbrace{\cancel{\frac{\Delta_\perp}{2ik_L}}}_{\text{Beugung}} + \underbrace{\frac{i}{2} k_L'' \partial_\eta^2}_{\text{Dispersion}} \Big) \tilde{E} = \underbrace{i \alpha_K |\tilde{E}|^2 \tilde{E}}$$

Beugung (letztes Kapitel) — Dispersion — α_K: Kerrkoeffizient, Kerr-NL

jetzt vernachlässigen: ebene Welle oder 1modige Faser : $\Delta_\perp \to 0$

$$\Big(\partial_\xi + \frac{i}{2} k_L'' \partial_\eta^2 \Big) \tilde{E} = \alpha_K |\tilde{E}|^2 \tilde{E}$$

„nichtlineare Schrödingergleichung"

Entsprechung f. Schrödingergleichung:

$\xi \to t \quad , \quad \eta \to x \quad , \quad \tilde{E} \to \psi(x,t)$

Nichtlinearität: $|\tilde{E}|^2 \tilde{E} \to |\psi|^2 \psi$

dimensionslos machen:

$q = \dfrac{\tilde{E}}{\tilde{E}_0} \quad , \quad \eta \to \eta/\eta_0 \quad , \quad \underline{\underline{\xi}} \to \xi/\xi_0$

$$\xi_0^{-1} = \alpha_K |\tilde{E}_0|^2 , \quad \eta_0 = \left[\xi_0 \left(-k_L'' \right) \right]^{1/2}$$

im allgemeinen: $\underline{\underline{k_L'' < 0}}$

$$\alpha_K \xi_0 |\tilde{E}|^2 \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}_0|}$$

$$\left(\frac{1}{\cancel{\xi_0}} \partial_{\xi/\xi_0} + \frac{i}{2} \xi_0 k_L'' \frac{1}{\eta_0^2} \partial^2_{\eta/\eta_0} \right) \tilde{E} = \underbrace{i \alpha_K |\tilde{E}|^2 \xi_0}_{q^2} \tilde{E} \quad \Big/ \cdot \xi_0$$

$$\left(\partial_\xi - \frac{i}{2} \partial_\eta^2 \right) \tilde{E} = |q|^2 \tilde{E} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\tilde{E}_0}$$

dimensionslos η, ξ

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{dimensionslose nl. Schrödingergleichung:} \\ \left(\partial_\xi - \frac{i}{2} \partial_\eta^2 \right) q = i |q|^2 q \end{array}}$$

<u>Bemerkungen</u>:

a) wenn noch komplexe Koeffizienten auftauchen:
„Ginzburg-Landau" Gleichung

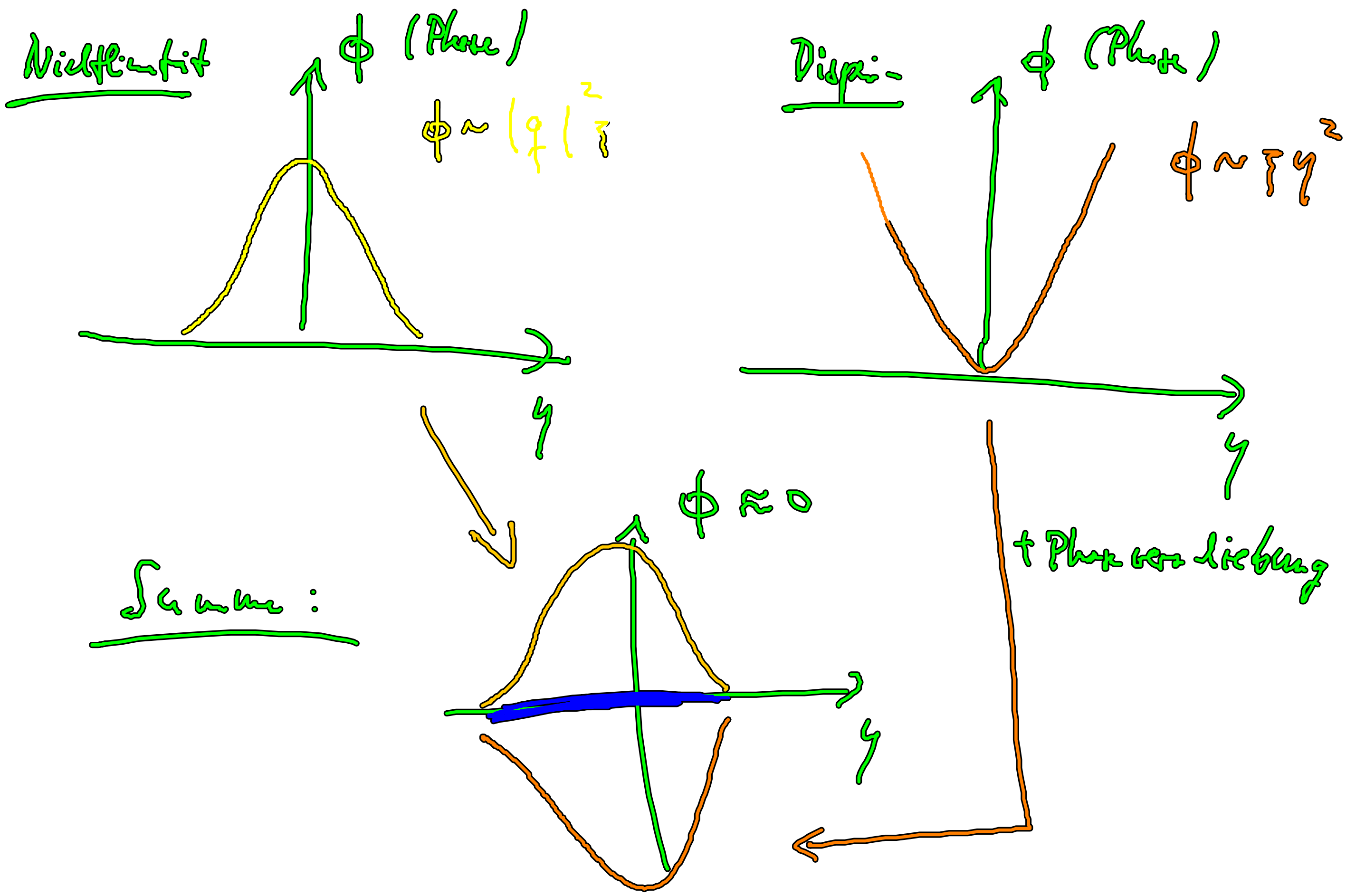
→ Phasenübergänge

b) Mgl. eines Solitons:

Kompensation von NL und Dispersion

„gäbe" eine Lösg $f(y)$

geht nur f. bestimmte Wellenform $f(y)$



Dispersion und NL können sich gegenseitig zu Nulle kompensieren.

analog Valium

$$\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

<u>Ansatz f. Soliton:</u>

ist inverse Geschwindigkeit

$$q(\xi, y) = A(y - v_s \xi) \cdot e^{i\phi\xi + i\psi y}$$

ϕ, ψ = konstante, werden geschickt gewählt.

einsetzen in nl. Schrödingergleichung:

$$\left(i\partial_\xi + \frac{1}{2}\partial_y^2\right) q + |q|^2 q = 0$$

$$i\partial_\xi A - \phi A + \frac{1}{2}\partial_y^2 A + i\psi\partial_y A - \frac{1}{2}\psi^2 A + A^3 = 0$$

(i) wähle $\psi = v_s$, dann $\partial_\xi A = \partial_y A(-v_s)$

$$\rightarrow_u \sim^u = 0$$

(ii) fordere $\phi + \frac{1}{2}\psi^2 = \phi + \frac{1}{2}v_s^2 = B_0 = \text{konstant}$

$$(- - - -)$$

um Erhaltungssatz zu bekommen:

$$\left(\frac{1}{2}\partial_y^2 - B_0\right) A + A^3 = 0 \qquad \Big|\ \partial_y A$$

$$\frac{1}{2}\partial_y A\, \partial_y^2 A = B_0 A \partial_y A - A^3 \partial_y A$$

$$\frac{1}{4}\underline{\underline{\partial_y}}\left((\partial_y A)^2 \right) = \frac{1}{2} B_0\, \underline{\underline{\partial_y}}(A^2) - \frac{1}{4}\underline{\underline{\partial_y}} A^4$$

$$\text{Form } \partial_y \underbrace{(\quad)}_{\text{konst bzgl. } y \ \equiv\ C_0} = 0$$

$$(\partial_y A)^2 = 2 B_0 A^2 - A^4 + C_0$$

$$\boxed{\partial_y A = A\sqrt{2B_0 - A^2}}$$

ist lösbar d. Trennung der Variablen

$$\frac{dA}{A\sqrt{2B_0 - A^2}} = dy \qquad \Big|\ \int$$

ist lösbar,
Brandteil

$C_0 = 0$ gesetzt weil f. $y \to \pm\infty$

Forderung, daß $A = 0$, $A' = 0$.

$$\int_{y_0}^{y} dy' \longrightarrow y - y_0 \qquad \text{(rechte Seite)}$$

$$\int_{A_0}^{A} dA' \ldots \longrightarrow \text{ist ein langer Ausdruck mit } \ln, \sqrt{\ } \text{ etc}$$

$\longrightarrow$ nach A umstellen : $\boxed{A = A_0 \operatorname{sech}\left(A_0 (y - y_0)\right)}$

$$q = \underline{\underline{A_0}} \operatorname{sech}\left(\underline{\underline{A_0}}\,(y - v_s \xi - y_0)\right) e^{i\left(v_s y - \frac{v_s^2}{2}\xi + \underline{\underline{\frac{A_0^2}{2}}}\xi\right)}$$

Solitär Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung

Amplitude A_0

Geschwindigkeit^{-1} $= v_s$

Zeitverschiebung y_0

$B_0 = \frac{A_0^2}{2}$ ist bei Integrieren erzwungen.

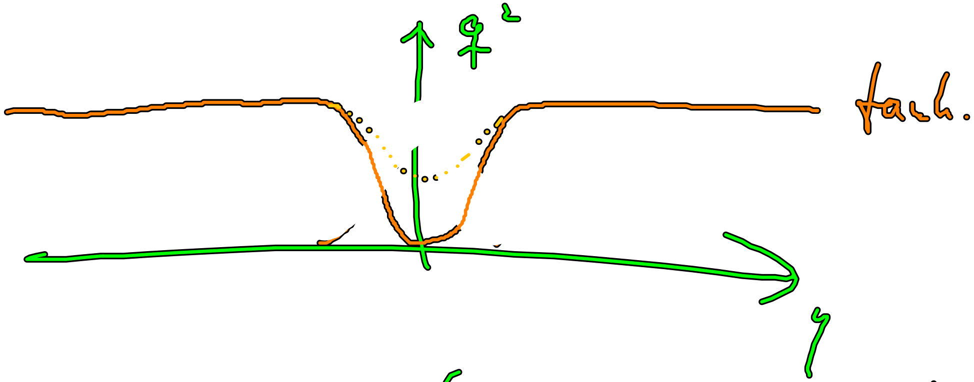
damit sind v_s und A_0 <u>nicht</u> unabhängig wählbar.

<u>Bemerkungen</u>:

a) solitäre Welle entstehen durch Kompensation von NL und Dispersion ($k_L'' < 0$, $u_2 \alpha_K > 0$)

b) ohne Rechng.: diese solitäre Welle sind Soliton

c) für $k_L'' > 0$ $\exists$ ein „dunkles" Soliton

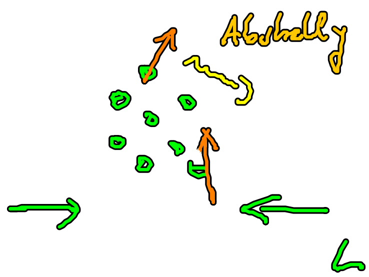


$$q \sim \tanh\left(A_0\,(y - v_s t - y_0)\right)$$

∃ auch graue Soliton (.......)

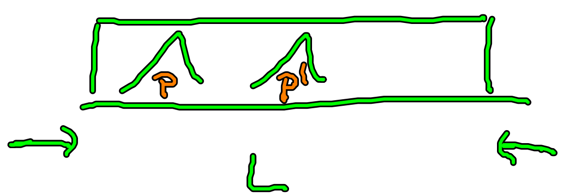
X Strahlungswechselwirkung einzelner atomarer Systeme

jetzt



$L \ll \lambda$

bisher



$L \gg \lambda$

„kollektive" Effekte in der Lichtemission

$\vec{P}(\vec{r}, t)$ ist Maß f. Abstrahlung

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{d}_{12}^{\,(i)} \rho_{12}^{i}(t)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) + \text{h.c.}$$

N-Dipole

„i-ter" Dipol Übergangswahrsch.-amplitude

Lage der Punktdipole

$$\dot{\rho}_{12}^{(i)} = -i\omega_{21}\rho_{12}^{(i)} + i\,\vec{d}_{21}^{\,i}\cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r}_i,t)}\,/\hbar$$

E-Feld am Ort $\vec{r}_i$ des i-ten Dipols setzt sich aus:

a) eingestrahltes Feld

b) abgestrahltes Feld der and. Dipole und d. i-ten Dipols selbst

(b) kann an Maxwellgl. berechnet werden.

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \vec{P} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \equiv \vec{Q}(\vec{r},t)$$

$\vec{E}$ ausrechnen aus dieser Gl.

und externes Feld (a) addieren

$\longrightarrow$ Gesamtfeld $\vec{E}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}_i,t)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{Q}\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{}$$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

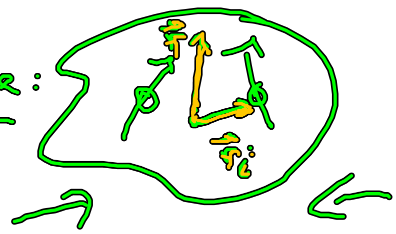
im Frequenzraum diskutieren

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3r' \, \frac{\vec{Q}\left(\vec{r}\,', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, e^{i\omega t}$$

$$t \to t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{Q}(\vec{r}\,',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Annahme:



Bereich $\ll \lambda$

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$e^{i 2\pi \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{\lambda}} \approx 1 + i\, 2\pi \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{\lambda}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}\left\{ \underbrace{\int d^3r' \, \frac{\vec{Q}(\vec{r}\,',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{gibt E-Verschiebung „Spiegeleffekt"}} + \underbrace{i\frac{\omega}{c}\int d^3r' \, \vec{Q}(\vec{r}\,',\omega)}_{\text{ergibt Dämpfung der Dipoloszillation}} \right\}$$

$\underbrace{\overset{\curvearrowright}{\vec{J}\ \vec{P}}}_{\text{kompliziert, u.U. } \infty}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{ansehen}}$

$$\int d^3r' \, Q(\vec{r}\,', \omega) = -\omega^2 \mu_0 \underbrace{\int d^3r' \, \vec{P}(\vec{r}\,', \omega)} + \underbrace{\dots \vec{D}' \vec{D}' \cdot P \dots}_{\text{bringen keinen Einfluss, ändern nur Vorfaktoren}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\frac{i}{4\pi} \frac{\omega}{c} \left(-\omega^2 \mu_0 \sum_i \vec{d}_{12}^{\,i} \, \rho_{12}^{(i)}(\omega) \right)$$

hängt nicht von $\vec{r}$ ab.

(h.c. in RWA - weglassen)

$L \ll \lambda$

$\vec{E}(\omega)$ kann jetzt in $\rho_{12}^{(i)}(\omega)$ eingesetzt werden:

$$-i\omega \rho_{12}^{(i)} = -i\omega_{21} \rho_{12}^{(i)} - \vec{d}_{21}^{\,(i)} \cdot \frac{\omega^3 \cancel{\mu_0}}{c \, 4\pi \hbar} \sum_k \vec{d}_{12}^{\,(k)} \rho_{12}^{(k)}(\omega)$$

Zurück in Zeitraum: a/ $\omega \approx \omega_{21}$ (RWA)

b/ identische Dipole $\sum_n \to N$

$\to$ n-Index weglassen

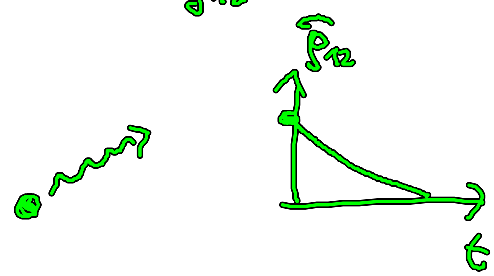
$$\partial_t \rho_{12} = -i\omega_{21}\rho_{12} - \gamma N \rho_{12}$$

$$\gamma = \frac{|d_{12}|^2 \omega_{21}^3 \mu_0}{\hbar c 4\pi}$$

AB

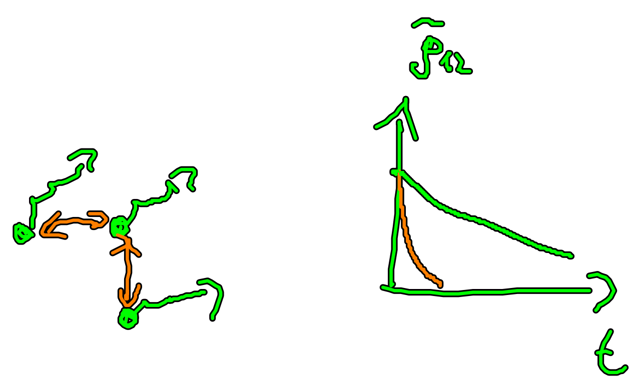
$$\rho_{12}(t) = \underbrace{e^{-i\omega_{12} t - \gamma N t}}_{\tilde{\rho}_{12}} \rho_{12}(0)$$

1. Dipol:



Dipol oszilliert zerfällt d. Abstrahlg. ins Vakuum

N Dipole:



Ein Dipol zerfällt in Umgebg. v. $N-1$ Dipol

N mal schneller. → klassische Superradianz!

Intensität die abgestrahlt wird skaliert mit N^2.

<u>qm</u>: „Dicke - Modell"