

## 6.5 Lösung der optischen Mastergleichung

Wdh.: Mastergleichung für Zwei-Niveau System gekoppelt an ein Bad von harmonischen Oszillatoren (EM-Feldern)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_E \rho_S(t) = & -i \frac{E'}{\hbar} [\sigma_z, \rho_S] \\ & + \gamma(t) (N(t)+1) (2\sigma_- \rho_S \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho_S - \rho_S \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \gamma(t) N(t) (2\sigma_+ \rho_S \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho_S - \rho_S \sigma_- \sigma_+) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E' &= E + \underbrace{\Delta_L(E) + 2\Delta_R(E)}_{\text{Lamb-Shift}} \\ \gamma(t) &= \gamma(E) \end{aligned}$$

$$\Delta_L(E) = \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{J(\omega)}{E-\omega} d\omega$$

$$\Delta_R(E) = \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{J(\omega)N(\omega)}{E-\omega} d\omega$$

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$$

### 6.5.1 Komponentenform der Mastergleichung

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} \rho_{cc}(t) & \rho_{c\beta}(t) \\ \rho_{\beta c}(t) & \rho_{\beta\beta}(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Populations} \\ \text{Kohärenzen} \end{matrix} \quad (2)$$

$$\rho_{ij} = \langle i | \rho_S(t) | j \rangle \quad i, j \in c, \beta$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von Gl. (4), (3) in Gl. (1) mit Abkürzung  $\gamma = \gamma(E)$ ,  $N = N(E)$

$$\dot{\rho}_{cc}(t) = -2\gamma(N+1)\rho_{cc}(t) + 2\gamma N \rho_{\beta\beta}(t) \quad (4a)$$

$$\dot{\rho}_{\beta\beta}(t) = -2\gamma N \rho_{\beta\beta}(t) + 2\gamma(N+1)\rho_{cc}(t) \quad (4b)$$

$$\dot{\rho}_{c\beta}(t) = -[\gamma(2N+1) + iE'] \rho_{c\beta}(t) \quad (4c)$$

$$\dot{\rho}_{\beta c}(t) = -[\gamma(2N+1) - iE'] \rho_{\beta c}(t) \quad (4d)$$

Stationäre Lösung für  $\dot{\rho}_{cc} = \dot{\rho}_{\beta\beta} = \dot{\rho}_{c\beta} = \dot{\rho}_{\beta c} = 0$

$$0 = -2\gamma (N+1) g_{cc}(t) + 2\gamma N g_{\partial t}(t) \quad (5a)$$

$$0 = -2\gamma N g_{\partial t}(t) + 2\gamma (N+1) g_{cc}(t) \quad (5b)$$

$$0 = - \underbrace{[\gamma (2N+1) + i\varepsilon']}_{\neq 0} g_{c\bar{c}}(t) \quad (5c)$$

$$0 = - \underbrace{[\gamma (2N+1) - i\varepsilon']}_{\neq 0} g_{\partial c}(t) \quad (5d)$$

Aus (5c), (5d) folgt

$$g_{c\bar{c}}(t) = g_{\partial c}(t) = 0 \Rightarrow \text{im stationären Fall ist Dichtematrix diagonal (Dichtheit)}$$

Mit (5a), (5b) ergibt sich

$$0 = -2\gamma (N+1) g_{cc}(t) + 2\gamma N (1 - g_{cc}(t))$$

$$0 = -(N+1) g_{cc}(t) + N(1 - g_{cc}(t))$$

$$(2N+1) g_{cc}(t) = N$$

$$g_{cc}(t) = \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2 \frac{1}{e^{\varepsilon/N+1}} + 1} = \frac{1}{e^{\varepsilon/N+1} + 1} \quad (1)$$

$$T \rightarrow 0 \rightarrow g_{cc}(t) = 0$$

$$T > 0 \rightarrow g_{cc}(t) > 0$$

Lösung der Mastergleichung im Limit  $T \rightarrow 0$

$$N(t) = \frac{1}{e^{2t/N} - 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

Gleichung (4a)-(4d) vereinfachen sich für  $N \approx 0$  zu

$$\dot{g}_{cc}(t) = -2\gamma g_{cc}(t) \quad (7a)$$

$$\dot{g}_{\partial t}(t) = 2\gamma g_{cc}(t) \quad (7b)$$

$$\dot{g}_{c\bar{c}}(t) = -[\gamma + i\varepsilon'] g_{c\bar{c}}(t) \quad (7c)$$

$$\dot{g}_{\partial c}(t) = -[\gamma - i\varepsilon'] g_{\partial c}(t) \quad (7d)$$

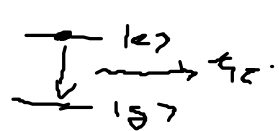
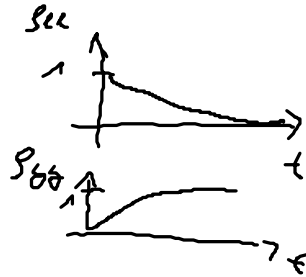
Lösung von (7.1) - (7.4)

$$f_{cc}(t) = e^{-2\mu t} f_{cc}(0)$$

$$f_{\partial\phi}(t) = (1 - e^{-2\mu t}) f_{cc}(0)$$

$$f_{cf}(t) = e^{-i\varepsilon' t} e^{-\mu t} f_{cf}(0)$$

$$f_{\phi c}(t) = e^{+i\varepsilon' t} e^{-\mu t} f_{\phi c}(0)$$



## 7 Resonanzfluoreszenz



Hamiltonian für At., EM-Feld und Dip.-Kopplg.

$$H = H_A + H_{EM} + H_{A-EM}$$

$$H_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z \quad \text{zweiniveausystem}$$

$$H_{EM} = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_{k\lambda} a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda} \quad \text{EM-Feld} \quad (\lambda \equiv \vec{k})$$

$$H_{A-EM} = -e\vec{r} \cdot \vec{E} = -i\hbar \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} (\sigma_+ + \sigma_-) (a_{k\lambda} - a_{k\lambda}^\dagger) \quad \text{Dip.-Kopplg.}$$

wobei

$$g_{k\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_{k\lambda}}{2\hbar\epsilon_0 V}} e^{-i\vec{r}_0 \cdot \vec{k}} \cdot \vec{e}_{k\lambda}$$

← Polarisationvektor für Mode k  
 ↑ Dipolmatrixelement  $\langle c | \vec{r} | \phi \rangle = \vec{r}_{c\phi}$

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$$

$$[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$$

$$[a_{k\lambda}, a_{k\lambda}^\dagger] = \delta_{k\lambda} \cdot \delta_{\lambda\lambda'}$$

Heisenberg'sche Bewegungsgleichung für Operatoren

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O} = [\hat{H}, \hat{O}]$$

$$\dot{a}_{k\lambda}(t) = -i\omega_k a_{k\lambda}(t) + g_{k\lambda}(\sigma_+ + \sigma_-)$$

$$\dot{\sigma}_-(t) = -i\omega_{ef} \sigma_-(t) + \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} \sigma_z^{(0)} (a_{k\lambda}(t) + a_{k\lambda}^+(t))$$

$$\dot{\sigma}_z(t) = 2 \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} (\sigma_-(t) - \sigma_+(t)) (a_{k\lambda}(t) - a_{k\lambda}^+(t))$$

Drehmomentwirkung (RWA)

$$\dot{a}_{k\lambda}(t) = -i\omega_k a_{k\lambda}(t) + g_{k\lambda} \sigma_-(t) \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_-(t) = -i\omega_{ef} \sigma_-(t) + \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} \sigma_z^{(0)} a_{k\lambda}(t) \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_z(t) = -2 \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} (\sigma_-(t) a_{k\lambda}^+(t) + \sigma_+(t) a_{k\lambda}(t)) \quad (3)$$

Mit Hilfe der positiven Frequenzkomponente des EM-Feldes

$$\vec{E}^+(t) = i \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} a_{k\lambda}(t) \vec{e}_{k\lambda} \quad (4)$$

↑ Polarisationvektor

sowie der atomaren Dipol

$$\vec{d} = e \vec{r}_j$$

lassen sich Gl. (2), (3) schreiben

$$\dot{\sigma}_-(t) = -i\omega_{ef} \sigma_-(t) - \frac{i}{\hbar} \vec{d} \cdot \vec{E}^+(t) \cdot \sigma_z(t) \quad (5)$$

$$\dot{\sigma}_z(t) = -\frac{2i}{\hbar} \vec{d} \cdot [\vec{E}^-(t) \sigma_- - \vec{E}^+(t) \sigma_+] \quad (6)$$

Integration von Gl. (5)

$$a_{k\lambda}(t) = \underbrace{a_{k\lambda}(0) \cdot e^{-i\omega_k t}}_{\text{Lösung der homogenen Maxwell-Gl.}} + \underbrace{g_{k\lambda} \int_0^t \sigma_-(t_1) e^{+i\omega_k(t_1-t)} dt_1}_{\text{Beitrag durch At.}} \quad (7)$$

Einssetzen von Gl. (7) in (3)  $\equiv E_0^+(t)$

$$E^+(t) = \underbrace{i \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} a_{k\lambda}(0) e^{-i\omega_k t}}_{E_0^+(t)} + \underbrace{i \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} g_{k\lambda} \int_0^t \sigma_-(t_1) e^{+i\omega_k(t_1-t)} dt_1}_{E_{RR}^+(t)}$$

7.1 Emissionsspektrum

Durch das Feld assoziierte Leistung

$$P(t) = \frac{d}{dt} (\text{EM-Feld Energie})$$

$$= \frac{d}{dt} \langle H_{EM} \rangle = \frac{d}{dt} \sum_{k\lambda} \epsilon_0 \omega_k \langle a_{k\lambda}^\dagger(t) + a_{k\lambda}(t) \rangle$$

Einsatz von Gl. (7)

$$P(t) = \sum_{k\lambda} g_{k\lambda} \epsilon_0 \omega_k \int_0^t \left[ \langle a_{k\lambda}^\dagger(t_1) \sigma_- \rangle e^{i\omega_k t} + \langle \sigma_+(t_1) a_{k\lambda}(t_1) \rangle e^{-i\omega_k t} \right] dt_1$$

Terme tragen zu stimulierter Emission und Absorption bei

$$+ 2 \text{Re} \left\{ \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}^2 \epsilon_0 \omega_k \int_0^t \langle \sigma_+(t_1) \sigma_-(t_1) \rangle e^{-i\omega_k(t-t_1)} dt_1 \right\}$$

Streulicht

Assoziierte Leistung durch Streulicht

$$P_S(t) = 2 \text{Re} \sum_{k\lambda} \frac{\omega_k |\mathbf{d}|^2 \cos^2 \Theta}{2 \epsilon_0 V} \int_0^t \langle \sigma_+(t_1) \sigma_-(t_1) \rangle e^{i\omega_k(t-t_1)} dt_1$$

Kontinuum-Limit  $V \rightarrow \infty$

$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{k\lambda} = |\mathbf{d}| \cos \Theta$  ↙ Winkel zwischen Dipolmoment des Atoms und Polarisationsebene des Lichts

$$\sum_{k\lambda} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \int \sin \Theta d\Theta \int d\phi$$

Langsam veränderliche atomare Operatoren

$$S_{\pm}(t) \approx \sigma_{\pm}(t) e^{\mp i\omega_k t}$$

↙ Frequenz des einfallenden Lichts

$$\leadsto P_S(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4 |\mathbf{d}|^2}{3\pi c^3} \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \omega^4 d\omega \int_0^t \langle S_+(t_1) S_-(t_1) \rangle e^{+i(\omega-\omega_k)(t-t_1)} dt_1 \right\}$$

Annahme, daß einfallendes Licht (einfallendes Spektrum) spektral um  $\omega \approx \omega_k$  stark p-p-licht ist, Limit  $t \rightarrow \infty$  und  $\tau \approx t - t_1$

$$\leadsto P_S(\omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4|d|^2 \omega^4}{3\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \langle S_+(t_0) S_-(t_0+\tau) \rangle e^{i(\omega-\omega_L)\tau} d\tau$$

$$S(\omega) \equiv 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \langle S_+(t_0) S_-(t_0+\tau) \rangle e^{i(\omega-\omega_L)\tau} d\tau \quad (8)$$

Leistungsspektrum der Resonanzfluorenz

$$P_S = c_0 \int_0^\infty S(\omega) d\omega \quad \text{"spektrale Leistung auf Summe über alle M. J."}$$

## 7.2 Atomare Korrelationsfunktion

Definition

$$g(\tau) \equiv \langle S_+(t) S_-(t_0+\tau) \rangle \quad (9)$$

$$\leadsto S(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty g(\tau) e^{i(\omega-\omega_L)\tau} d\tau$$

↑ Spektrum des streuenden selb. Resonanzfluoreszenz

Heisenberg'sche Bewegungsgleichung Gl. (5) umgeschrieben auf atomare Operatoren  $S_-$

$$\dot{S}_-(t) = -i(\omega_H - \omega_L - i\beta) S_-(t) - \frac{i}{\hbar} d \nabla_z E_0^+(t) e^{i\omega_L t} \quad (10)$$

↙ linear polarisiertes Licht parallel zu atomarem Dipol

$$\dot{\sigma}_z(t) = -2\beta [1 + \langle \sigma_z(t) \rangle] - \frac{2d}{\hbar} d [S_-(t) E_0^-(t) e^{-i\omega_L t} - S_+(t) E_0^+(t) e^{i\omega_L t}] \quad (11)$$

wobei  $\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|d|^2 \omega_H^3}{3\hbar c^3}$  und der atomare Dipol parallel zum linear polarisierten einfallenden Feld gerichtet wurde

Zeitliche Ableitung von Gl. (9)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} g(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \langle S_+(t) S_-(t_0+\tau) \rangle \\ &= -i(\omega_H - \omega_L - i\beta) g(\tau) + \frac{d E_0}{2\hbar} \underbrace{\langle S_+(t_0) \sigma_z(t_0+\tau) \rangle}_{h(\tau)} \end{aligned}$$

↑ Heisenberg'sche Bewegungsgleichung

Um einen geschlossenen Satz von Gleichungen zu erhalten führt man noch folgende Korrelationsfunktion ein

$$L_-(\tau) \equiv \langle S_+(t_0) \sigma_- (t_0 + \tau) \rangle$$

$$f(\tau) \equiv \langle S_+(t_0) S_+(t_0 + \tau) \rangle$$

Diese Korrelationsfunktionen erfüllen folgende gekoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} g(\tau) = -i(\omega_{eg} - \omega_L - i\beta) g(\tau) + \frac{1}{2} \Omega L_-(\tau) \quad (12a)$$

$$\frac{d}{d\tau} f(\tau) = +i(\omega_{eg} - \omega_L + i\beta) f(\tau) + \frac{1}{2} \Omega L_-(\tau) \quad (12b)$$

$$\frac{d}{d\tau} L_-(\tau) = -2\beta \langle S_+(t_0) \rangle - \Omega (f(\tau) + g(\tau)) - 2\beta L_-(\tau) \quad (12c)$$

Anfangsbedingung zur Lösung

$$g(0) = \langle S_+(t_0) S_-(t_0) \rangle = \frac{1}{2} [1 + \langle \sigma_z(t_0) \rangle]$$

$$L_-(0) = \langle S_+(t_0) \sigma_- (t_0) \rangle = -\langle S_z(t_0) \rangle$$

$$f(0) = \langle S_+(t_0) S_+(t_0) \rangle = 0$$

Für große Feldstärken  $\Omega \gg \beta$  und resonantem einfallenden Licht  $\omega_{eg} = \omega_L$  folgt als Lösung der DGL's (12a)-(12c)

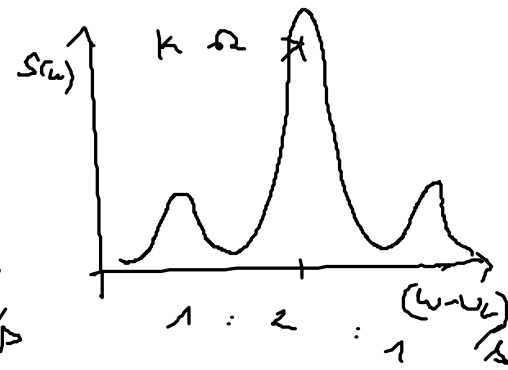
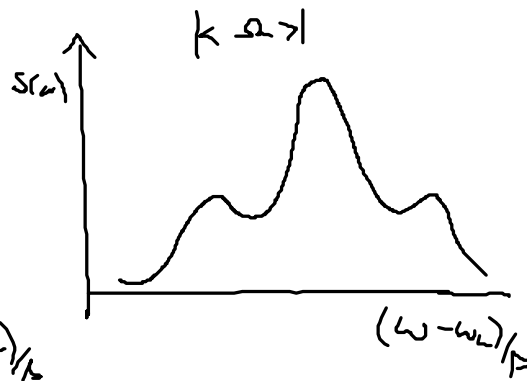
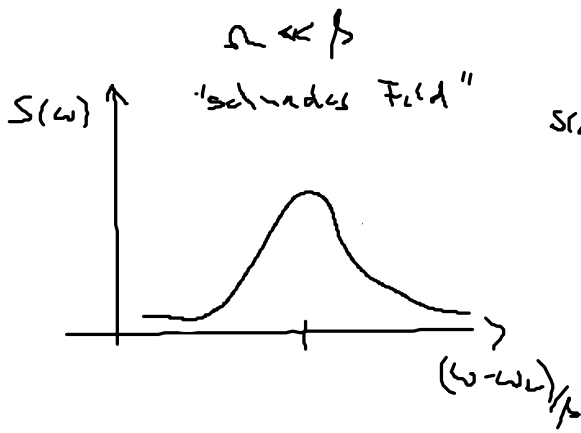
$$g(\tau) = \frac{1}{2} \left[ e^{-\beta\tau} + e^{-\frac{3\beta\tau}{2}} \cos(\Omega\tau) \right] + \left( \frac{\beta}{\Omega} \right) \tau \quad (13)$$

Einsetzen der Lösung Gl. (13) in die Formel für das Leistungsspektrum liefert

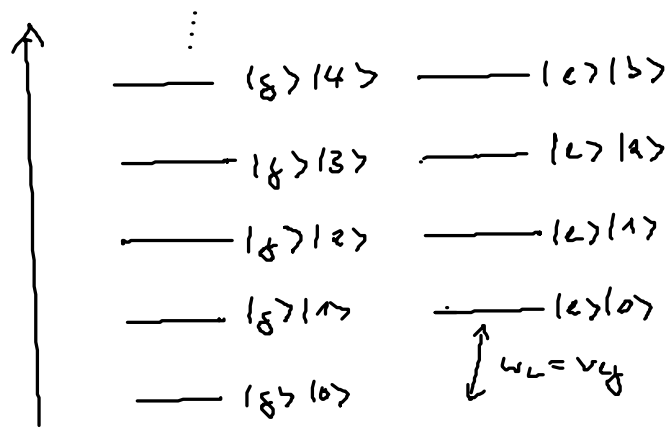
$$S(\omega) = 2\pi \left( \frac{\beta}{\Omega} \right) \delta(\omega - \omega_L) + \frac{\beta/\Omega}{(\omega - \omega_L)^2 + \beta^2} + \frac{3\beta/\Omega}{(\omega - \omega_L - \Omega)^2 + 9\beta^2/4} + \frac{3\beta/\Omega}{(\omega - \omega_L + \Omega)^2 + 9\beta^2/4}$$

Raman & fluorescence spectrum

"Mollow-Triplet"



Interpretation durch Jaynes-Cummings-Liter



Dipol  
k.pplung  
=>



onvergent states

$$E_{2n} = \epsilon_1 (n + 1/2) + \epsilon_2 \sqrt{n+1}$$

$$E_{2n+1} = \epsilon_1 (n + 1/2) - \epsilon_2 \sqrt{n+1}$$

$\epsilon_1$  (Höufig)  
 $R_n = 2\epsilon_2 \sqrt{n+1}$

