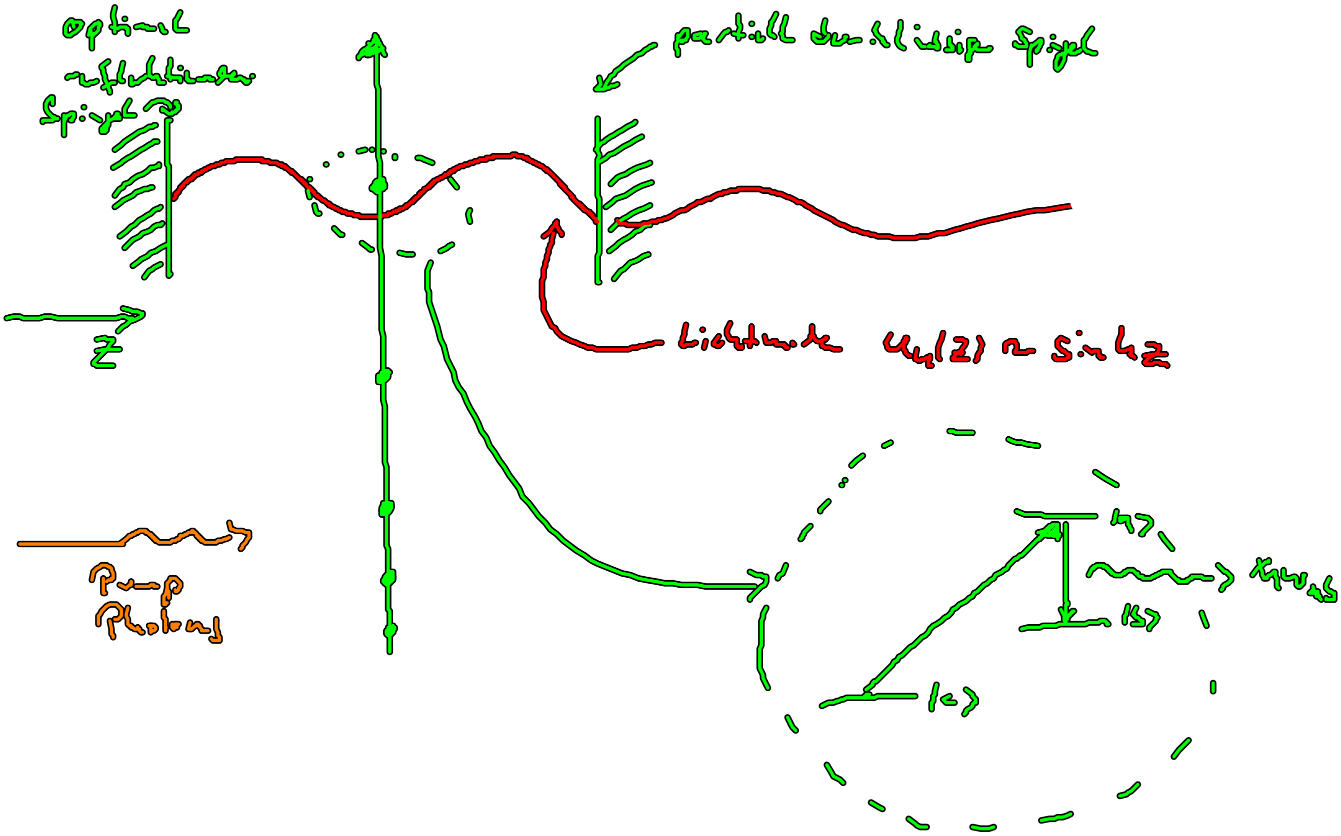
8. Quantentheorie des Lasers



Semiklassische Beschreibung (Materie quantenmechanisch und Licht klassisch beschrieben) erlaubt keine Aussagen zu z.B.

- Photonen-Statistik des emittierten Lichts
- Linienbreite des Lasers
- Phasenfluktuation des Lasers
- ...

$\Rightarrow$ erfordert volle Quantentheorie des Lasers

8.1 Zeitentwicklung der Dichtematrix

Jaynes-Cummings Hamiltonian für zwei-Niveau System plus Lichtwelle und Kopplung (mit Drehwellennäherung und Dipolnäherung)

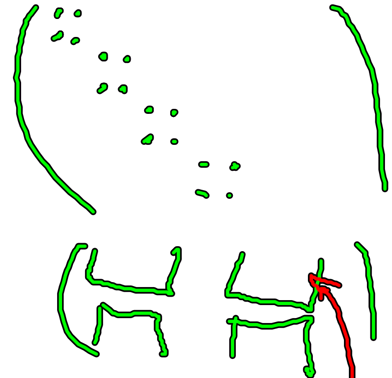
$$\underline{H} = \frac{\hbar\omega_{as}}{2}\underline{\sigma}_z + \hbar\omega\,\underline{a}^\dagger\underline{a} + \hbar g\left(\underline{\sigma}_+\underline{a} + \underline{\sigma}_-\underline{a}^\dagger\right)$$

Aufteilung des Hamiltonians

$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_1$

$\underline{H}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\,\underline{\sigma}_z + \hbar\omega\,\underline{a}^\dagger\underline{a}$

$H_1 = \hbar\frac{\delta}{2}\,\underline{\sigma}_z + \hbar g\,(\underline{\sigma}_+\underline{a} + \underline{\sigma}_-\underline{a}^\dagger)$



Detuning

$\delta = \omega_{as} - \omega$

$[H_0, H_1] = 0$

Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild

$$\underline{U}(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{H}_1\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\tau/\hbar)^n}{n!}\,H_1^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\tau/\hbar)^n}{n!}\begin{bmatrix}\frac{\delta}{2} & g\,\underline{a}\\ g\,\underline{a}^\dagger & -\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}^n$$

(*) $\underline{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\underline{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a^+ \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Matrix Potenzen in der Taylorreihe von $U(\tau)$

gerade, 2m :
$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & g\underline{a} \\ g\underline{a}^+ & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}^{2m} = \begin{bmatrix} (\underline{\xi}+g^2)^m & 0 \\ 0 & (\underline{\xi})^m \end{bmatrix}$$

ungerade, 2m+1 :
$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & g\underline{a} \\ g\underline{a}^+ & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}^{2m+1} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2}(\underline{\xi}+g^2)^m & g(\underline{\xi}+g^2)^m\underline{a} \\ g\underline{a}^+(\underline{\xi}+g^2)^m & -\frac{\delta}{2}(\underline{\xi})^m \end{bmatrix}$$

wobei
$$\underline{\xi} = g^2\underline{a}^+\underline{a} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$\underline{a} + 5 \Rightarrow \underline{a} + 5\cdot\underline{\mathbb{1}}$

$$\underline{U}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau\sqrt{\underline{\xi}+g^2}) - \frac{i\delta}{2}\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\xi}+g^2})}{\sqrt{\underline{\xi}+g^2}} & -ig\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\xi}+g^2})}{\sqrt{\underline{\xi}+g^2}}\underline{a} \\ -ig\underline{a}^+\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\xi}+g^2})}{\sqrt{\underline{\xi}+g^2}} & \cos(\tau\sqrt{\underline{\xi}}) + \frac{i\delta}{2}\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\xi}})}{\sqrt{\underline{\xi}}} \end{bmatrix}(\tau)$$

$$\underline{a} = \underline{\sigma}_+ \underline{\alpha} = \underline{\sigma}_+ \otimes \underline{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & \\ & 0 & \sqrt{2} & \\ & & 0 & \sqrt{3} \ \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{N\times N} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{2N\times 2N}$$

Anfangsbedingung für Dichteoperator von Atom + Feld

$$\rho(t=0) = \rho_F(0) \otimes \rho_A(0) = \rho_F(0) \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\rho_A(0) = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix}}$$

$|a\rangle$

$|b\rangle$

Zeitentwicklung des Dichteoperators von Atom + Feld

$$\underline{\rho}(\tau) = \underline{U}(\tau)\,\underline{\rho}(0)\,\underline{U}^+(\tau) = \underline{U}(\tau)\,\underline{\rho}_F(0) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\underline{U}^+(\tau)$$

Ausmultiplizieren und Spur über Atomzustände, Detuning $\delta = 0$

$$\varrho_F(\tau) = Tr_{Atom}(\varrho(\tau))$$

$$= \cos(\underline{\lambda}\tau)\,\underline{\varrho}_F(0)\cos(\underline{\lambda}\tau) + g^2\underline{a}^+\frac{\sin(\underline{\lambda}\tau)}{\underline{\lambda}}\,\underline{\varrho}_F(0)\frac{\sin(\underline{\lambda}\tau)}{\underline{\lambda}}$$

$$\equiv M_{Gain}\,\varrho(0) \qquad (5)$$

Gain-Superoperator

wobei

$$\underline{\lambda} = g\sqrt{\underline{a}^+\underline{a}+1}$$

Mastergleichung mit Pump und mit Cavity Verlusten

$$\frac{d\varrho_F}{dt} = \left(\frac{d\varrho_F}{dt}\right)_{Gain} + \left(\frac{d\varrho_F}{dt}\right)_{Loss}$$

$$\left(\frac{d\varrho_F}{dt}\right)_{Loss} = \frac{C}{2}\left(2\underline{a}\,\varrho_F\,\underline{a}^+ - \underline{a}^+\underline{a}\,\varrho_F - \varrho_F\,a^+a\right)$$

↳ Verluste durch Auskopplung des Laserlichts am partiell durchlässigen Spiegel der Cavity
-> "Lindblad - Dissipation", s. Kapitel 6.

$$\left(\frac{d\varrho_F}{dt}\right)_{gain} \approx \frac{\varrho_F(t+\Delta t) - \varrho_F(t)}{\Delta t}$$

$$= r\left[\varrho_F(t+\Delta t) - \varrho_F(t)\right]$$

$$\approx -r\varrho_F(t) + r\int_0^{\Delta t}\underbrace{\exp(-\gamma\tau)}\,\varrho_F(t+\tau)\,d\tau$$

Zerfall der aktiven Population während der Transit-Zeit durch die Cavity

Einsetzen von Gl. (5)

$$= -r\rho_F(t) + r\int_0^{\Delta t} d\tau\, \exp(-\gamma\tau)\cdot\Big[\cos\left(\sqrt{\underline{a}^+\underline{a}+1}\, g\tau\right)\rho_F(t)$$

$$\times \cos\left(\sqrt{\underline{a}^+\underline{a}+1}\, g\tau\right) + \underline{a}^+\left[\frac{\sin\left(\sqrt{\underline{a}\underline{a}^+ +1}\, g\tau\right)}{g\sqrt{\underline{a}\underline{a}^+ +1}}\rho_F(t)\frac{\sin\left(\sqrt{\underline{a}\underline{a}^+ +1}\, g\tau\right)}{g\sqrt{\underline{a}\underline{a}^+ +1}}\right]\underline{a}\Big]$$

Matrix-Elemente der Master-Gleichung

$$\rho_{nm} = \langle n|\rho_F|m\rangle \tag{7}$$

erfordern folgende Integrale

$$\gamma\int_0^{\Delta t\to\infty} d\tau\, \exp(-\gamma\tau)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(\sqrt{m+1}\, g\tau\right)$$

$$= \frac{1+\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+m+2)}{1+2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+m+2)+\left(\frac{g}{\gamma}\right)^4(n-m)^2} \tag{8}$$

$$\gamma\int_0^{\Delta t\to\infty} d\tau\, \exp(-\gamma\tau)\sin\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)$$

$$= \frac{2\left(g/\gamma\right)^2\sqrt{(n+1)(m+1)}}{1+2\left(g/\gamma\right)^2(n+m+2)+\left(g/\gamma\right)^4(n-m)^2} \tag{9}$$

Abkürzungen

$A = \frac{2rg^2}{\gamma^2}$ Pump-Koeffizient

$B = \frac{4g^2}{\gamma^2}A$ Sättigungs-Koeffizient

$C = \frac{\omega}{Q} = \frac{1}{t_{cav}}$ Verlust-Koeffizient, t_{cav} - Photon-Lebenszeit in der Cavity

Q: Qualitätsfaktor der Cavity

Für die Matrixelemente von Gl. (6) unter Verwendung von Gl. (8), (9) folgt

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nm} = -\frac{\tilde{N}_{nm} A}{1+N_{nm}\frac{B}{A}}\rho_{nm} + \frac{\sqrt{nm}\,A}{1+N_{n-1,m-1}\frac{B}{A}}\rho_{n-1,m-1} - \frac{C}{2}(n+m)\rho_{nm} + C\sqrt{(n+1)(m+1)}\,\rho_{n+1,m+1} \qquad (11)$$

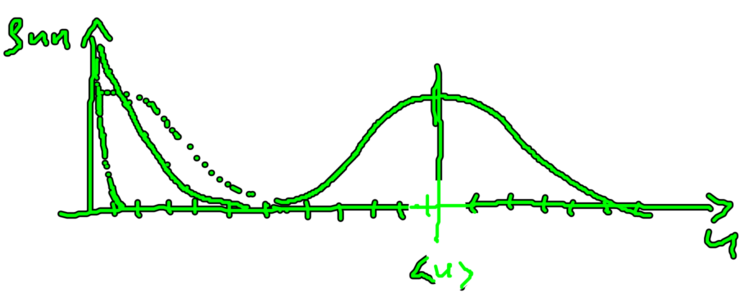
wobei

$$\tilde{N}_{nm} = \frac{1}{2}(n+m+2) + \frac{1}{8}(n-m)^2\frac{B}{A}$$

$$N_{nm} = \frac{1}{2}(n+m+2) + \frac{1}{16}(n-m)^2\frac{B}{A}$$

Für die Moden-Populationen (Diagonalelemente) folgt

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nn} = -\frac{A(n+1)}{1+(n+1)\frac{B}{A}}\rho_{n,n} + \frac{A(n)}{1+(n)\frac{B}{A}}\rho_{n-1,n-1} - C(n)\rho_{nn} + C(n+1)\rho_{n+1,n+1}$$



8.2 Photon-Statistik des Lasers im stationären Zustand

Stationärer Limit

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nn} = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \rho_{n+1,n+1} = \frac{A/C}{1+(n+1)\frac{B}{A}}\rho_{nn} \qquad \to \text{Rekursion}$$

Lösung der Rekursion

Fall 1: Laser unterhalb der Schwelle, $\frac{A}{C} < 1$, $k \equiv n+1$

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{A}{C}\right)^n \prod_{k=0}^{n} \Big(1 + \underbrace{k\frac{B}{A}}_{\ll 1}\Big)^{-1} \qquad (13)$$

Normierungsbedingung für $\frac{A}{C} < 1$

$$\sum_n \rho_{nn} = 1 = \rho_{00} \sum_n \left(\frac{A}{C}\right)^n = \rho_{00} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A}{C}} \overset{!}{=} 1$$

$$\rho_{00} = 1 - \frac{A}{C} \qquad (14)$$

Für $(n+1)\frac{B}{A} \ll 1$ folgt aus Gl (13), (14)

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{nn} &= \left(1 - \frac{A}{C}\right)\left(\frac{A}{C}\right)^n \underbrace{\prod_{k=0}^{n} (1 + \text{"}0\text{"})^{-1}}_{\approx 1} \\ &= \left(1 - \frac{A}{C}\right)\left(\frac{A}{C}\right)^n \end{aligned}}$$

Im Falle $A/C \sim \exp(-\hbar\Omega/kT)$ entspricht das der Bose-Einstein Verteilung für Schwarzkörperstrahlung.

Fall 2: Laser oberhalb der Schwelle, $\frac{A}{C} > 1$

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{A}{C}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{kB}{A}\right)^{-1}$$

$$= \rho_{00} \left(\frac{A^2}{BC}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{B} + k\right)^{-1} \qquad (15)$$

Mittlere Photonenzahl

$$\langle n \rangle = \sum_n n \cdot \rho_{nn} = \mathrm{Tr}(\hat{n}\rho)$$

$$\underset{\text{Gl.(15)}}{=} \rho_{00} \sum_n \left(n + \frac{A}{B} - \frac{A}{B}\right) \cdot \left(\frac{A^2}{BC}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{B} + k\right)^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{nn} = 1 - \rho_{00}$$

$$= \rho_{00} \frac{A^2}{BC} \sum_n \left(\frac{A^2}{BC}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{A}{B} + k\right)^{-1} - \frac{A}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{nn}$$

$$\rho_{nn} \to \sum_n \rho_{nn} = 1$$

$$= \frac{A^2}{BC} - \frac{A}{B}(1-\rho_{00})$$

$$\to \frac{A^2}{BC} \quad \text{für Laser deutlich oberhalb des Schwellwertes} \qquad (16)$$

Mit Gl. (15) und (16) folgt für die Photonen-Population

$$\rho_{nn} \sim \langle n\rangle^n \frac{\exp(-\langle n\rangle)}{n!} \quad \text{Poisson-Verteilung}$$

Photonenstatistik des Lasers im stationären Fall