

8.3 Linienbreite des Lasers

Offdiagonalelemente der Mastergleichung (11)

$$S_{n, n+k}(t) = \phi_n(k, t)$$

Entwicklung in niedrigster Ordnung in β/A

$$\dot{\phi}_n(k, t) = -\frac{k^2}{\beta} \beta \phi_n(k, t)$$

$$\begin{aligned} & -\left(n+1 + \frac{k}{2}\right) \left[A - \beta\left(n+1 + \frac{k}{2}\right) \right] \phi_n(k, t) \\ & + \left[n(n+k) \right]^{1/2} \left[A - \beta\left(n + \frac{k}{2}\right) \right] \phi_{n-1}(k, t) \\ & - C\left(n + \frac{k}{2}\right) \phi_n(k, t) \\ & + \left[(n+1)(n+k+1) \right]^{1/2} \phi_{n+1}(k, t) \end{aligned} \quad (17)$$

Ansatz für Lösung von Gl. (17)

$$\phi_n(k, t) = \sum_s \underbrace{\gamma_s(k, t)}_{\text{Eigenfunktion}} \exp(-\mu_s^{(k)} t) \quad \uparrow \text{Eigenwert } (\geq 0)$$

Fall $k=0$ (Diagonalelemente): da es einen stationären Limit für die Population gibt

$$\mu_0^{(0)} = 0$$

Für offdiagonalelemente (kohärenzen) der Dichtematrix zeigt sich $\mu_s^{(k)} > 0$
So daß die Lösung (für $k \neq 0$)

$$\phi_n(k, t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

Lösungsansatz für Laser -Substanz des Schwellwertes

$$\phi_n(k, t) \approx \sqrt{S_{n+1, n+1} \cdot S_{n, n+1}} \exp(-\mu_0^{(k)} t) \quad (18)$$

Der Ansatz (18) stellt eine gute Lösung der DGL (17) dar falls

$$\mu_0^{(k)} = \frac{1}{2} k^2 D$$

$$D = \frac{c}{2\langle n \rangle} \quad \text{Phasendiffusionskoeffizient}$$

gemittelt wird

Offdiagonalelemente der Dichtematrix

$$S_{n, n+k}(t) = S_{n, n+k}(0) \exp(-\nu_0^{(k)} t)$$

Rücktransformation ins Schrödingerbild

$$S_{n, n+k}(t) = S_{n, n+k}(0) \exp(-i\omega t - \nu_0^{(k)} t)$$

↑ Phase durch H_0 Hamiltonian

Elektrische Feldoperator für einzelne Feldmode

$$\underline{E}(z) = E (\underline{\alpha} + \underline{\alpha}^\dagger) \sin kz$$

Erwartungswert

$$\langle E(t) \rangle = \langle \underline{E}(z) \rangle$$

$$= E \sum_n (S_{n, n+1}(t) \sqrt{n+1} + c.c.) \sin kz$$

$$= E \sum_n (S_{n, n+1}(0) \exp(-i\omega t - \nu_0^{(1)} t) \sqrt{n+1} + c.c.) \sin kz$$

$$= E_0 \cos(\omega t + \delta) \exp(-\frac{\Gamma}{2} t)$$

(13)

mit

$$E_0 = 2EA$$

$$\sum_n S_{n, n+1}(0) \sqrt{n+1} = A \exp(-i\delta)$$

Fouriertransformation des elektrischen Feldes (13)

$$|E(\Omega)|^2 = \left| \int_0^\infty \exp(-i\Omega t) E_0 \cos(\omega t + \delta) \exp(-\frac{\Gamma}{2} t) dt \right|^2$$

$$= \frac{E_0^2}{4} \left[\frac{1}{(\omega - \Omega)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \right]$$

8.4. Einshub: Phasenoperator

8.4.1 Direkter Phasenoperator

Teilchenzahl und Phase als konjugierte Variablen

$$\left[\frac{\Phi_0}{\hbar}, \underline{n} \right] = -i \quad (1)$$

\uparrow ← Phasenoperator
 \uparrow ← Teilchenzahloperator

Unschärfrelation für nicht-kommutierende Variablen

$$\Delta n \Delta \Phi_0 \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Problematische Situation: Matrixelemente von Gl. (1)

$$\langle n | \left[\frac{\Phi_0}{\hbar}, \underline{n} \right] | n' \rangle = -i \langle n | n' \rangle = -i \delta_{nn'}$$

$$(n - n') \langle n | \frac{\Phi_0}{\hbar} | n' \rangle = -i \delta_{nn'}$$

Inkonsistenz für $n = n'$

$$0 = -i \quad \searrow$$

weiteres Problem:

- für kleine Δn kann $\Delta \Phi_0$ im Prinzip heute größer als 2π ausfallen

- Polardarstellung von Erzeuger und Vernichter

$$\underline{a} = e^{i\frac{\Phi_0}{\hbar}} \sqrt{n} = \sqrt{n+1} e^{i\frac{\Phi_0}{\hbar}}$$

$$\underline{a}^\dagger = \sqrt{n} e^{-i\frac{\Phi_0}{\hbar}} = e^{-i\frac{\Phi_0}{\hbar}} \sqrt{n+1}$$

Falls $\frac{\Phi_0}{\hbar}$ als hermitisch angenommen wird (da es Observable beschreiben soll), ist $e^{i\frac{\Phi_0}{\hbar}}$ nicht unitär, d.h.

$$e^{-i\frac{\Phi_0}{\hbar}} \neq \left[e^{i\frac{\Phi_0}{\hbar}} \right]^\dagger$$

8.4.2 Pegg-Barnett Phasenoperator

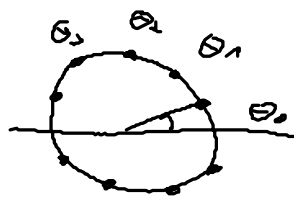
Definition eines Phasen-Zustands in einem $(S+1)$ -dimensionalen Vektorraum mit Limit $S \rightarrow \infty$

$$|\theta\rangle = \lim_{S \rightarrow \infty} (S+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^S e^{in\theta} |n\rangle \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

→ Phasenstände sind übervollständig und nicht-orthogonal (ähnlich zu kohärenten Zuständen)

Spezielle Wahl der Phasen:

$$\Theta_m = \Theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1}$$



equidistante Verteilung
entlang Einheitskreises

kompletter Satz von orthogonalen Zuständen
ergibt sich durch

$$|\Theta_m\rangle = e^{i \frac{m}{S+1} \left(\frac{2\pi m}{S+1} \right)} |\Theta_0\rangle, \quad m=0,1,2,\dots,S$$

Exponentialoperator bewirkt "Translation in der Besetzungszahl"

$$e^{i \frac{m}{S+1} \delta} |n\rangle = |n+\delta\rangle$$

Definition des Hermiteschen Phasenoperators von Pezz und Barlett

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}_\Theta &= \sum_{m=0}^S \Theta_m |\Theta_m\rangle \langle \Theta_m| \\ &= \Theta_0 + \frac{2\pi}{S+1} \sum_{m=0}^S m |\Theta_m\rangle \langle \Theta_m| \end{aligned} \quad (3)$$

↑ beliebige Referenzphase

Eigenwertgleichung

$$\underline{\Phi}_\Theta |\Theta_m\rangle = \Theta_m |\Theta_m\rangle \quad (4)$$

Führen die Matrixelemente des Kommutators $[\underline{n}, \underline{\Phi}_\Theta]$ für
Pegg-Barlett Operator zu ähnlichen Problemen wie Dirac's
Phasenoperator?

Projektionsoperator aus Gl. (1)

$$|\Theta_m\rangle \langle \Theta_m| = (S+1)^{-1} \sum_{n, n'=0}^S e^{i(n'-n)\Theta_m} |n\rangle \langle n| \quad (5)$$

Einsetzen von Gl. (5) in Gl. (3) für PB-Phasenoperator

$$\underline{\Phi}_\Theta = \Theta_0 + \frac{2\pi}{S+1} \sum_{m=0}^S m (S+1)^{-1} \sum_{n, n'=0}^S e^{i(n'-n)\Theta_m} |n\rangle \langle n|$$

$$= \Theta_0 + \frac{2\pi}{S+1} + \frac{2\pi}{S+1} \sum_{u \neq u'} \frac{\exp(i(u'-u)\Theta_0)}{\exp[i(u'-u)\frac{2\pi}{S+1}] - 1} \quad (6)$$

Matrixelemente von $\underline{\Phi}_\Theta$

$$\langle u | \underline{\Phi}_\Theta | u \rangle = \Theta_0 + \frac{2\pi S}{S+1}$$

$$\langle u' | \underline{\Phi}_\Theta | u \rangle = \frac{2\pi}{S+1} \frac{\exp(i(u'-u)\Theta_0)}{\exp[i(u'-u)\frac{2\pi}{S+1}] - 1} \quad u \neq u'$$

Matrixelemente des Kommutators $[u, \underline{\Phi}_\Theta]$

$$\langle u | [u, \underline{\Phi}_\Theta] | u \rangle = 0 \quad (7)$$

$$\langle u' | [u, \underline{\Phi}_\Theta] | u \rangle = \frac{2\pi(u'-u)}{S+1} \frac{\exp(i(u'-u)\Theta_0)}{\exp[i(u'-u)\frac{2\pi}{S+1}] - 1} \quad u \neq u'$$

Für $u, u' \ll S$ folgt Näherungsweise aus Gl. (7) mit Taylorentwicklung

$$\langle u' | \underline{\Phi}_\Theta | u \rangle \approx \frac{-i}{u-u'} \exp(i(u'-u)\Theta_0)$$

$$\langle u' | [u, \underline{\Phi}_\Theta] | u \rangle \approx -i(1 - \delta_{uu'}) \exp(i(u'-u)\Theta_0) \quad (8)$$

Wählt man als Referenzphase $\Theta_0 = 0$ folgt für $u \neq u'$ aus (8)

$$\langle u' | [u, \underline{\Phi}_\Theta] | u \rangle = -i$$

↳ gewünschte Form des Kommutators

Wirkung des Exponentialoperators

$$\exp(i\underline{\Phi}_\Theta) | u \rangle = \exp\left(i \sum_{m=0}^S \Theta_m | \Theta_m \rangle \langle \Theta_m | \right) | u \rangle \quad (9)$$

$$1 | u \rangle = \sum_{p=0}^S 1 | \Theta_p \rangle \langle \Theta_p | u \rangle = (S+1)^{-1/2} \sum_{p=0}^S \exp(-iu\Theta_p) | \Theta_p \rangle \quad (10)$$

Einsetzen von Gl. (10) in (9)

$$\exp(i\underline{\Phi}_\Theta) | u \rangle = (S+1)^{-1} \sum_{m=0}^S \exp(-i(u-1)\Theta_m) | \Theta_m \rangle = | u-1 \rangle \quad u > 0$$

Darstellung in Energieeigenbasis

↑
Translation in der Besetzung

$$\exp(i\Phi_\theta) = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + \dots + |s-1\rangle\langle s| + \exp(i\theta_0(s+1)) |s\rangle\langle 0|$$

Polarzerstellung von Erzeug- und Vernichtoperatoren

$$\underline{\alpha} = \exp(i\Phi_\theta) \sqrt{u}^\dagger = \sqrt{1} |0\rangle\langle 1| + \sqrt{2} |1\rangle\langle 2| + \sqrt{3} |2\rangle\langle 3| + \dots + \sqrt{s} |s-1\rangle\langle s|$$

$$\underline{\alpha}^\dagger = \sqrt{u} \exp(-i\Phi_\theta) = \sqrt{1} |1\rangle\langle 0| + \sqrt{2} |2\rangle\langle 1| + \dots + \sqrt{s} |s\rangle\langle s-1|$$

Kommutator

$$[\underline{\alpha}, \underline{\alpha}^\dagger] = 1 - (s+1) |s\rangle\langle s|$$

8.5 Phasenfluktuation des Lasers

Varianz des Pegg-Barnett Phasenoperator

$$\langle (\Delta\Phi_\theta)^2 \rangle_{\text{Laser}} = \sum_m \theta_m^2 \langle \theta_m | \rho_{\text{Laser}} | \theta_m \rangle - \left[\sum_m \theta_m \langle \theta_m | \rho_{\text{Laser}} | \theta_m \rangle \right]^2$$

Dichteoperator im Laser-Betrieb für kohärenten Anfangszustand $|\alpha\rangle$

$$\rho(t) = \exp(-\gamma t) \sum_{k, l} \frac{r^k r^l}{\sqrt{k! l!}} \exp(i\epsilon_0(k-l) - \frac{D t (k-l)^2}{2}) |k\rangle\langle l|$$

$$d = r \exp(i\epsilon_0)$$

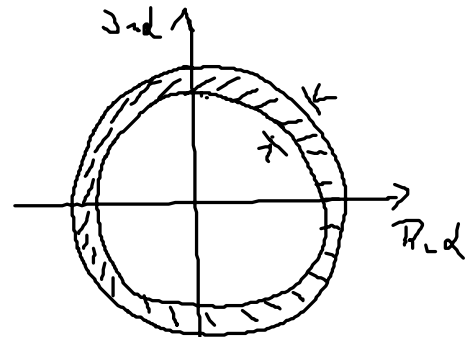
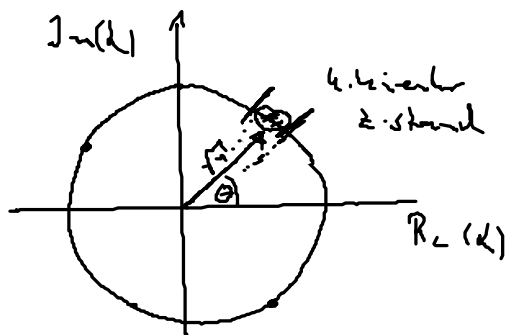
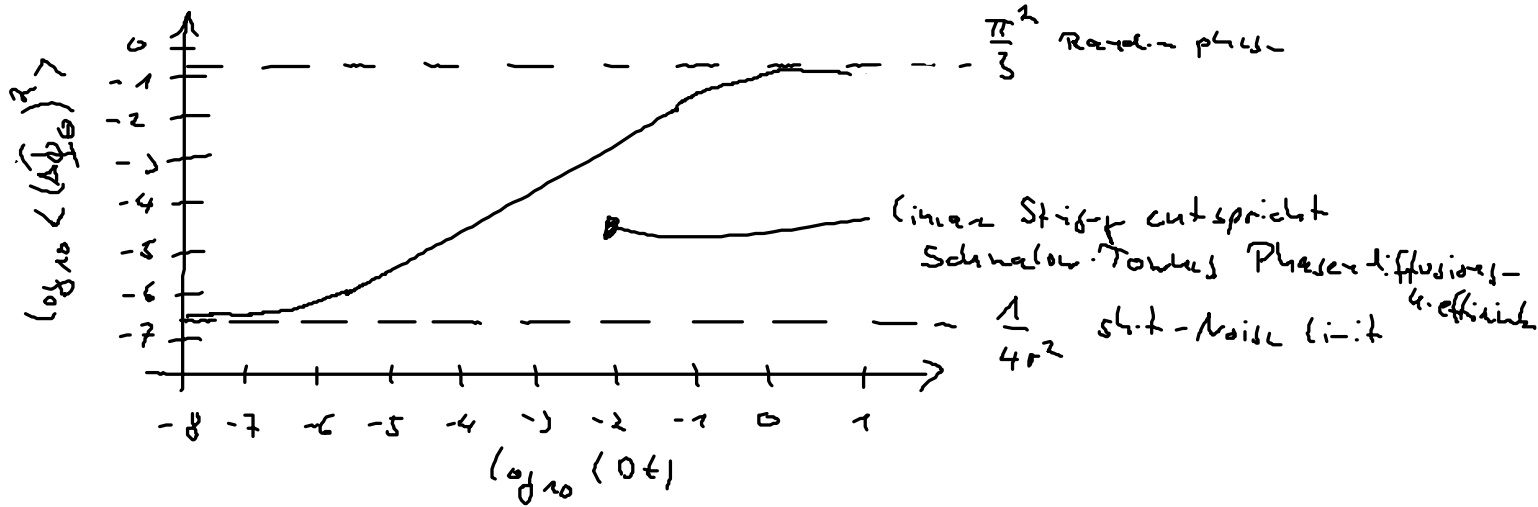
Auswertung für Phasenvarianz

$$\begin{aligned} \langle (\Delta\Phi_\theta)^2 \rangle_{\text{Laser}} &= \left(\frac{1}{4r^2} + Dt \right) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{-\pi + 2\pi(k+1)}{\alpha t} \right] \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \left[\frac{-\pi + 2\pi k}{\alpha t} \right] \right\} \\ &\quad - 4(\pi\alpha^2)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(-\pi + 2\pi k)^2}{\alpha^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[-\frac{(-\pi + 2\pi(k+1))^2}{\alpha^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha^2 = 2 \left(\frac{1}{4r^2} + Dt \right)$$

$$D = \frac{C}{2\langle n \rangle} \quad , \quad C = \frac{1}{t_{\text{cav}}}$$

$t_{\text{cav}} \rightarrow$ Photon
Lebenszeit in der Cavity



Phasendiffusion ausgelöst durch spontane Emission in der Cavity

Vorlesung im WS 14/15, Mo 10-12 EW 731

Moderne Methoden der Quantenfeldtheorie

Vorlesungsinhalte

- klassische Feldtheorie
- Symmetrien, Lie-Gruppen, Lie-Algebren
- Lorentz- und Poincaré-Gruppe
- Freie Spinorfelder
- Streutheorie, S-Matrix
- Feynman-Diagramme
- Einfache Streuprozesse der Quantenelektrodynamik
- Renormierung

- Pfadintegral
- Higgs-Mechanismus
- Beta-Zerfall und elektroschwache Wechselwirkung