English Summary:

1. Dynamical systems and deterministic chaos

$$\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dynamical variables

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ vector field

$\phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$ flow of the vector field $\underline{F}$

$\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; x_0)$ ensemble of all trajectories

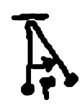
Stability of fixed point $\underline{x}^*$ $\quad (0 = \underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*))$

$\delta\underline{\dot{x}} = (DF)_* \delta\underline{x}$ with Jacobian $(DF)_* \equiv A$, $\quad \delta\underline{x} \equiv \underline{x} - \underline{x}^*$

ansatz $\delta\underline{x} = \underline{\xi} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda\underline{\xi} = A\underline{\xi} \Rightarrow$ eigenvalues λ_k

Beispiel für ein dynamisches System:

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung



$x_1 = \varphi$

$x_2 = ml^2\dot{\varphi}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma\dot{\varphi}}_{\text{Reibung}} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl\sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}}\right\} \text{Fixpkte. ungeändert}$$

Linearisierung: $\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl\cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

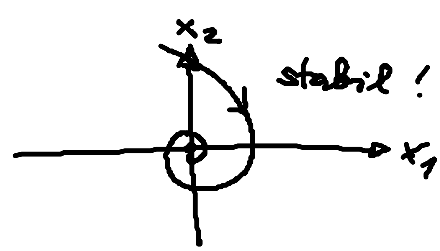
a) $x_1 = x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ (schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a_1) gedämpfte Schwingungen (schwache Reibung)

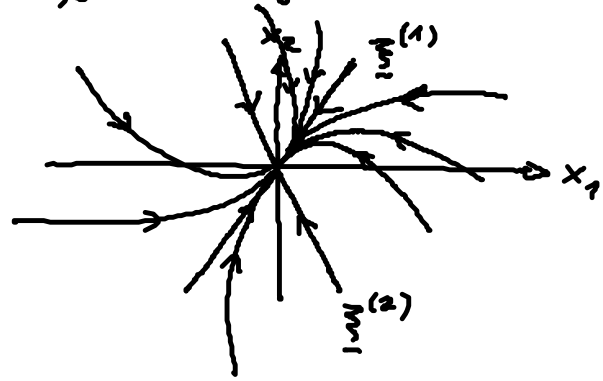


stabiler Fokus

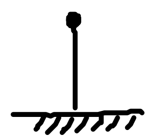
(a_2) aperiodische gedämpfte Bewegung
(überdämpfte Osz.)

starke Reibung ($\gamma^2 > \omega^2$): $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

stabiler Knoten



b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$

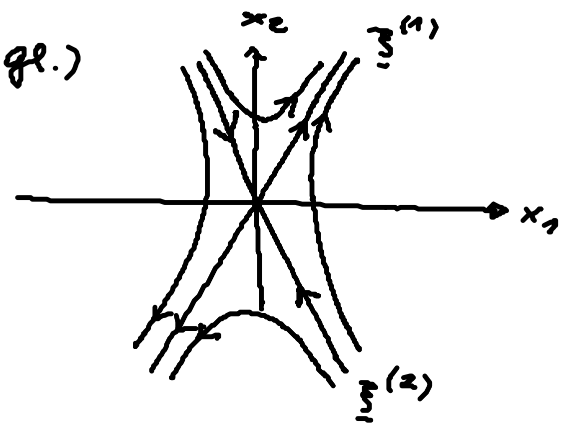


$\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$ (char. gl.)

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}_{> \gamma}$

$\lambda_1 > 0$

$\lambda_2 < 0$ instabil!



Sattelpunkt

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

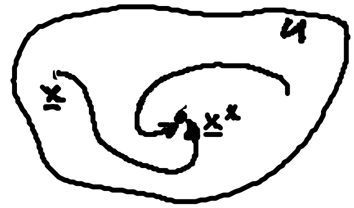
Sei $\underline{x}^*$ Fixp. des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

Def.: $\underline{x}^*$ heißt stabil (oder Lyapunov-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V um $\underline{x}^*$ existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

Def.: x^* heißt asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U ex., so dass

$$\phi(U,t_2) \subset \phi(U,t_1) \subset U$$
für $0 < t_1 < t_2$ und
$$\lim_{t\to\infty} \phi(\underline{x},t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$$



(U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen, d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen)

Widerspruch $\longleftrightarrow$ <u>Liouville'scher Satz für Hamilton'sche Systeme</u> (konstantes Phasenraumvol.)

<u>Def.</u>: Ein dynamisches System heißt <u>dissipativ</u>, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen (kontrahieren).

<u>Kriterium für (Lyapunov-)Stabilität</u> (lokal):

Wenn $\underline{x}^*$ stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{\underline{x}^*}$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpunkt a) ($\varphi = 0$) des Pendels mit/ohne Reibung

<u>Hinreichende Bed. für asymptot. Stabilität</u>:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile

Beispiel: Fixpkt. a) des Pendels mit Reibung

<u>Beispiel für Instab.</u>: Fixpt. b) ($\varphi = \pi$)

<u>Allg. System mit $n=2$</u>

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{21}A_{12}$$
$$= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} - \lambda(A_{11}+A_{22}) + \lambda^2 = 0$$

Eigenwerte aus der char. Gl.:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \,\mathrm{tr} A + \det A = 0$$
$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$
$$= \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\det A = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}\right)$$

$$\mathrm{tr}A = \sum_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_* = \mathrm{div}\, \underline{F}$$

<u>Fallunterscheidung</u>

(a) <u>Stabiler Fokus</u> : $\det A > 0 \qquad \mathrm{tr}A < 0$
(Strudelpunkt) $\qquad (\mathrm{tr}A)^2 < 4\det A$

$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega \qquad (\lambda_0, \omega > 0)$ gedämpfte Osz. im Phasenraum

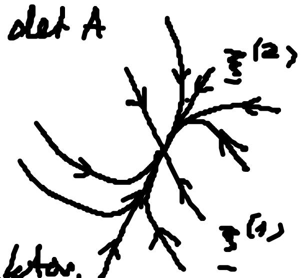
ellipt. Spirale

(b) <u>Instabiler Fokus</u> : $\det A > 0 \qquad \mathrm{tr}A > 0$
$(\mathrm{tr}A)^2 < 4\det A$

$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega \qquad (\lambda_0, \omega > 0)$ entdämpfte Osz.

(c) <u>stabiler Knoten</u> : $\det A > 0 \;,\; \mathrm{tr}A < 0$
$(\mathrm{tr}A)^2 > 4\det A$

$\left.\begin{matrix}\lambda_1 < 0\\ \lambda_2 < 0\end{matrix}\right\} \in \mathbb{R} \qquad$ exp. Zerfall

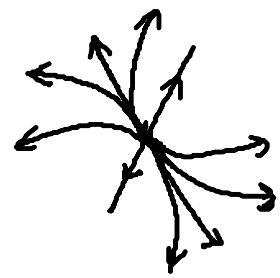


(fast alle Trajektorien
nähern sich längs dem Eigenvektor,
der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

(d) <u>instabiler Knoten</u> : $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$

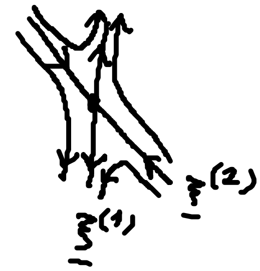
$(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$\left.\begin{matrix}\lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0\end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$ exp. Entdämpfung

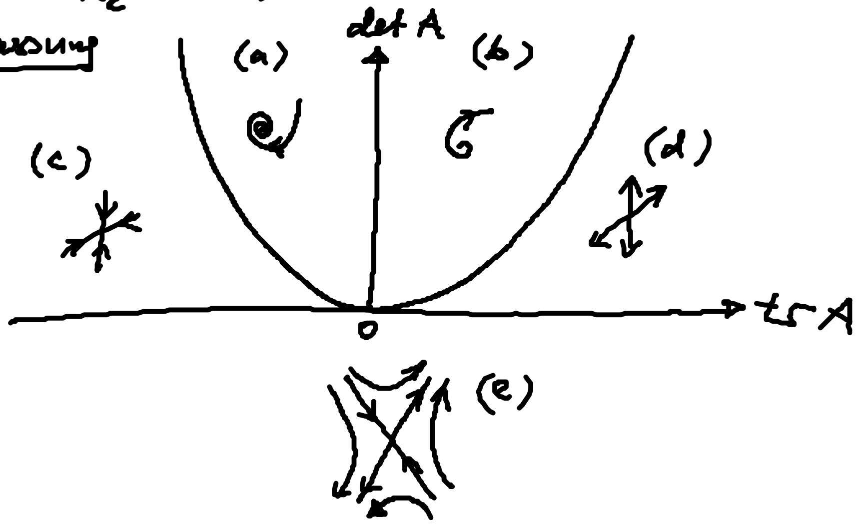


(e) <u>Sattelpunkt</u> : $\det A < 0$

$\left.\begin{matrix}\lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0\end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

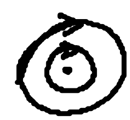


<u>Zus.fassung</u>



<u>Grenzen zwischen den 5 Bereichen</u> : entartete Fälle

- lin. Stab.analyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpkt. nötig.

  $\operatorname{tr} A = 0$, $\det A > 0$: entweder <u>Zentrum</u>  ungedämpfte Osz.

  oder <u>schwach stabiler</u> / <u>instabiler Fokus</u>

- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich

  (<u>Bifurkationen</u> = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)