

English Summary:

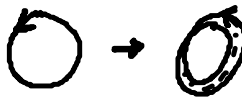
(C) local bifurcations of limit cycles

(C1) Saddle-node bif. of LC



amplitude  $\neq 0$   
frequency  $\neq 0$

(C2) Period doubling



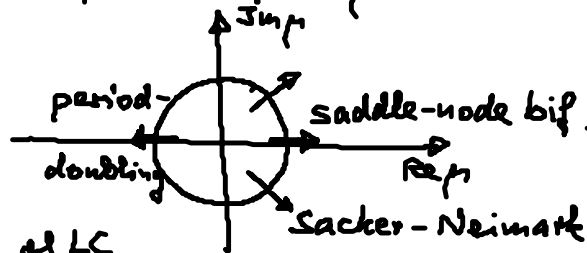
often cascade  $2^n T$   
period-doubling  
route to chaos

(C3) Sacker-Neimark bif.



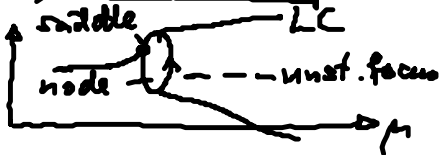
torus  
non-commensurate  
frequencies

Floquet multiplier  $\mu = e^{\lambda T}$

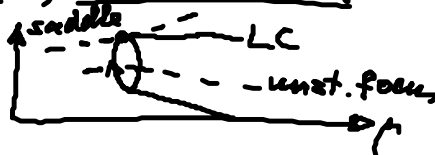


(D) global bif. of LC

(D1) SNIPER bif.



(D2) homoclinic bif.



amplitude  $\neq 0$   
frequ.  $\rightarrow 0$

Einfaches generisches Modell für SNIPER-Bifurkation

(Ditzinger, Ning, Hu: PRE 50, 3508 (94)

Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 87 (95)

Hizanidis, Auer, Schöll: Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarhoard.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} &= b - r \cos \varphi \end{aligned} \quad b > 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte:  $r = 0$  (immer instab. Fokus,  $\ddot{u}$ )

$$r = 1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (b < 1)$$

für  $b > 1$ : LC mit  $r=1$ ,  $\dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

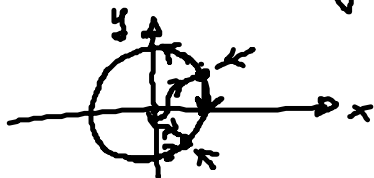
Bif. plot.:  $b=1 \Rightarrow T \rightarrow \infty$  (Frequ.  $\rightarrow 0$ )

Fixpt.e auf dem Kreis  $r=1$  ( $b < 1$ ):

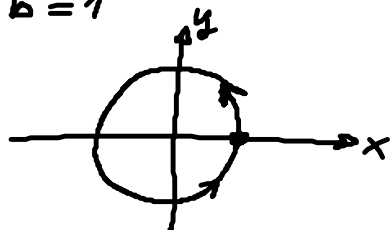
$$(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1-b^2}) \quad \text{Sattelpkt.} \quad (\Lambda = \begin{Bmatrix} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{Bmatrix})$$

$$= (b, -\sqrt{1-b^2}) \quad \text{stab. Kn.} \quad (\Lambda = \begin{Bmatrix} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{Bmatrix})$$

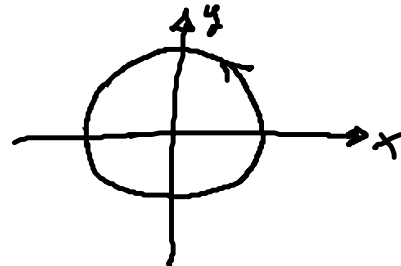
Sattel-Knoten-Bif.:  $b=1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit Typ I)

(E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q} \quad \text{Diff. konst. } D$$

lineare Stab. der Fixpunkte (räuml. homogen)

$$\underline{S} \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$$

$\Rightarrow$  Dispersionsrel.  $\lambda(\underline{k})$

$\Rightarrow \text{Re } \lambda(\underline{k}) < 0$  stabil

$> 0$  instabil

$= 0$  Bif. von räumlich-period. Lösungen  
mit Wellenvektor  $\underline{k}$

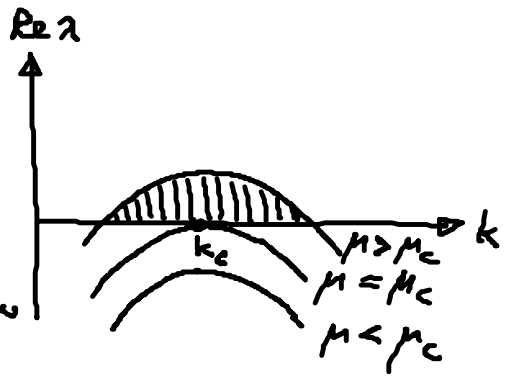
$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q^*) - D_{ij} k^2$$

(E1) Turing - Instabilität

$$\lambda(k) = 0 \quad |k| = k_c \neq 0$$

stationäre, räumlich period. Struktur  
mit  $k_c$  bifurkiert

(z.B. langsam diffundierender Aktivator u. schneller Inhibitor)



$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

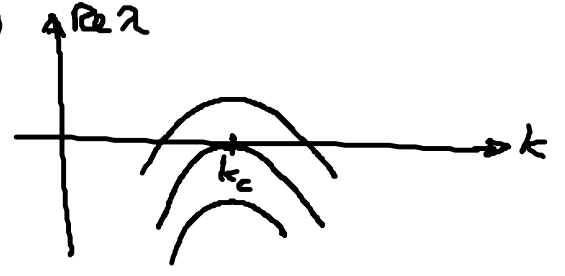
(E2) Stehende / laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

oszillierende, räumlich period. Struktur

→ Wellen  $S_q \sim e^{i(kx \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

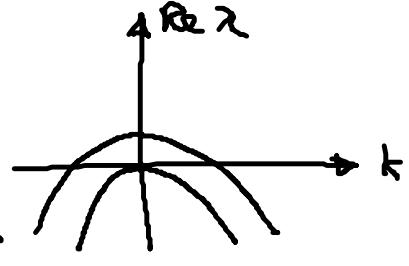


(E3) Hopf - Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml. - homog. Grenzzyklus



1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber „ungeordnete“ Bewegung  
im Langzeitverhalten von Systemen mit  $n \geq 3$  (autonom):  
seltsamer (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$
Attraktor: Torus $T^d$ mit $d=2,3,4,\dots$	seltener Attraktor mit fraktaler Dim.	

Autokorr. fkt.  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in  $\tau$  |  $\rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow \infty$  |  $= 0$  für  $\tau \geq \tau_c$

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$ )  
power spectral density

diskrete Frequ.  $\omega_1, \omega_2, \dots$  | breites Frequenzband

Instab. der Bewegung  
bei kleinen Störungen  
der Anfangsbed.  
typ. universelle  
Bifurkations Szenarien

Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variationen der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität)

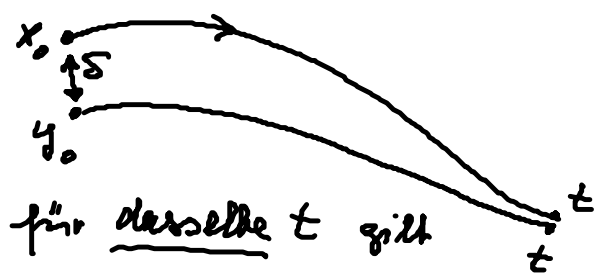


bahnstabil  
(alle benachbarten Bahnen bleiben in einer Röhre um  $\phi(t, x_0)$ )



asymptot. bahnstabil  
(Abstand der benachbarten Bahnen  $\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ )

asymptot. stabil:



$$|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve  $\phi(t, x_0)$ :

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x(t), t)}_{A_{ik}(t)} \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$ : Eigenwerte  $\lambda_k(t)$ , Eigenvektor  $\underline{\xi}^{(k)}(t)$

formale Lösung:

$$\underline{\delta x}(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(t') dt'} \underline{\delta x}(0)$$

zeitentw. einer infinites. Kugel um  $x_0$

$\rightarrow n$ -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen  $\rho_k(t) \approx \rho_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\rho_k(t)}{\rho_k(0)}$$

NB: Führender (größte) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |x(t) - y(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

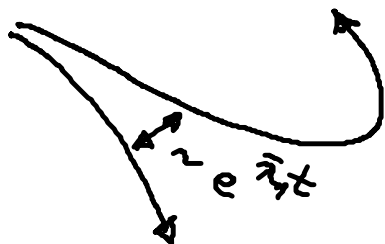
$\lambda < 0$ : kleine Abweichungen der Anf. bed. exponentiell gedämpft

$\lambda > 0$ : expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

$\triangleq$  Def. für Chaos

chaotischer Attraktor in  $\mathbb{R}^3$ :  $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 < 0$

instab. Bew. auf dem Attraktor  
Goldstone Mode (invar. Mannigf.)  
 Anmäh. an den Attraktor



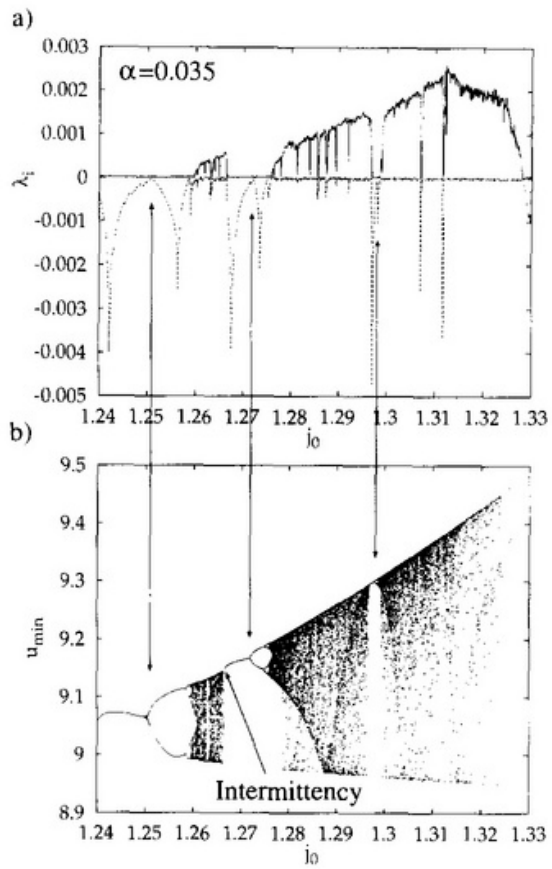


Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for  $\alpha = 0.035$