

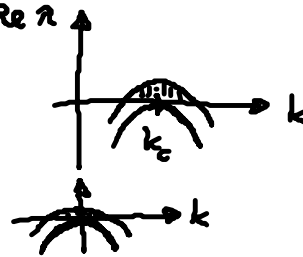
English Summary:

(E) Bifurcation of spatial patterns $\dot{q}(x,t) = F(q,p) + D\Delta q$
 linear stab. analysis $\delta q(x,t) \sim e^{\lambda t} e^{ikx} : \lambda(k)$ dispersion rel.

(E1) Turing inst. $\lambda(k_c), k_c \neq 0$

(E2) Wave inst. $\lambda(k_c) = \pm i\omega, k_c \neq 0$

(E3) Hopf bif. $\lambda(k_c) = \pm i\omega, k_c = 0$



1.4 Deterministic Chaos

• sensitive dependence upon initial conditions: Lyapunov exp. $\lambda > 0$

• broad-band power spectral density

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$$



S. Bose et al. / Physics Letters A 195 (1994) 144-150

Heterostructure Hot. El. Diode
(semiconductor)

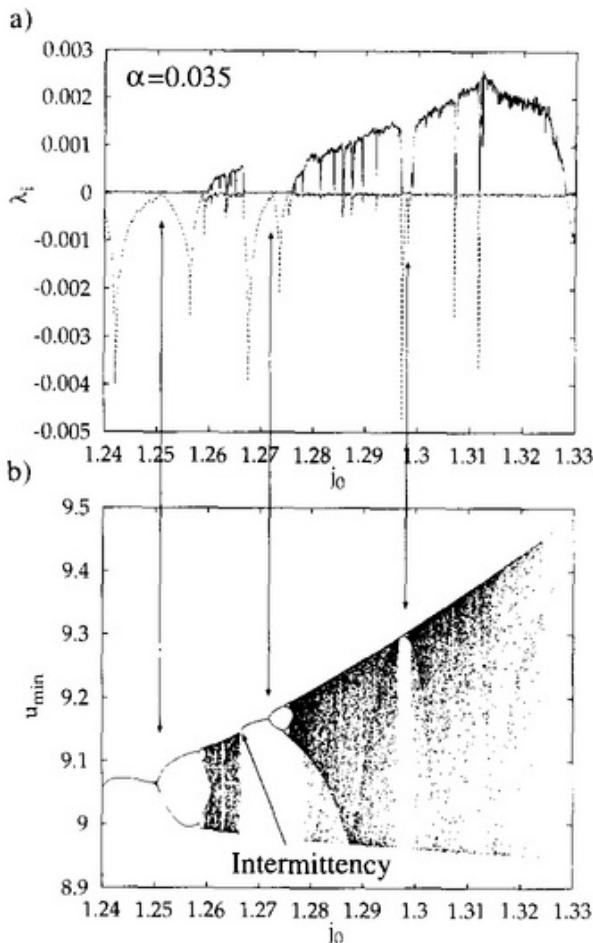


Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for $\alpha = 0.035$

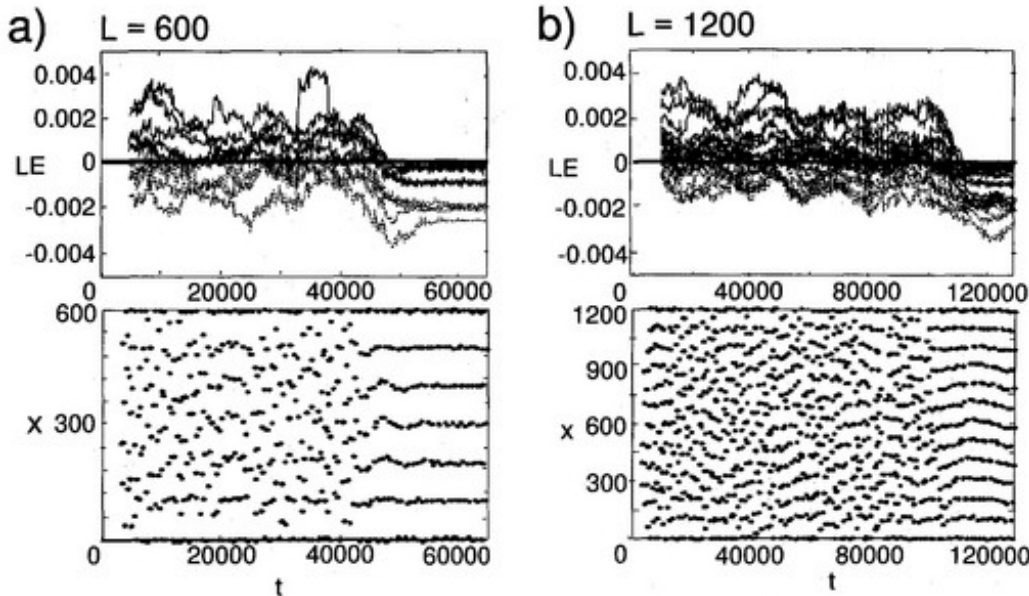


Fig. 2. Transient spatio-temporal chaos for different system sizes (a) $L = 600$ and (b) $L = 1200$. The upper row shows the evolution of the local Lyapunov exponents (LE), and the lower row shows the space-time plot of the maxima of the current density $j = u - a$ ($\alpha = 0.02$, $D = 8.0$, $j_0 = 1.21$, $T = 0.05$).

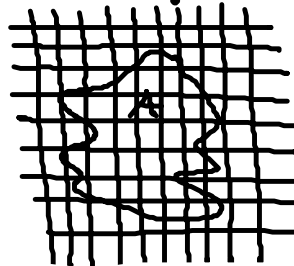
Reaktions-Diff.-System
 extensives Chaos
 ↓
 Zahl der pos. Lyapunov-Exp.
 ~ Systemgröße

Quantitative Formulierung der fraktalen Dim. des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:





Hausdorff-Dimension einer Punktmenge A im \mathbb{R}^n

Sei $N(\epsilon)$ die Mindestzahl von n -dim. Würfeln mit Seitenlänge ϵ , um A zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

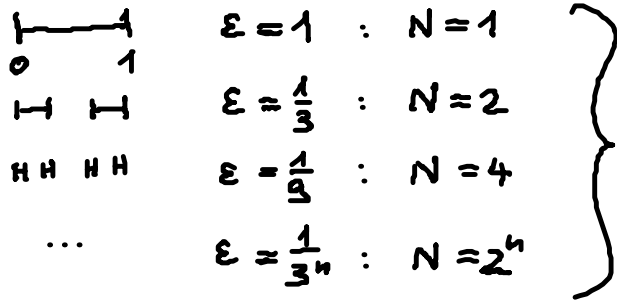
die fraktale (Hausdorff-) Dim. (d.h. $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$)

- Beispiel:
- Punkt $N(\epsilon) = \text{const.}$  $d = 0$
 - Linie $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon}$  $d = 1$
 - Fläche $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$  $d = 2$
 - Vol. $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^3}$  $d = 3$

Chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 : Volumen $\rightarrow 0$

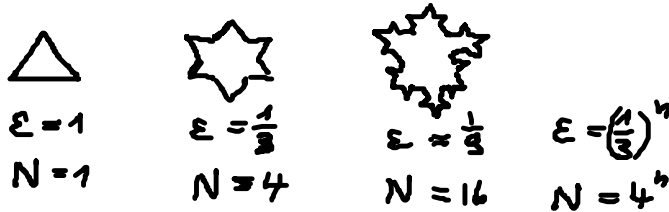
$\Rightarrow d < 3$; aber $d > 2$: z.B. Lorenz-Modell $d \approx 2.05...$

Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)
hierarchisch, n



$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\dots$$

Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)



Umfang $= 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow d > 1$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$1 < d = 1.2618\dots < 2$
 (zwischen Kurve u. Fläche)

analog: Meeresküste

2. Kontrollkonzepte

- klass. Kontrolltheorie
- Chaoskontrolle
- Quantenkontrolle

SFB 910: Control of Self-Organizing Nonlinear Systems

Symposien: 29.5.15 / 3.7.15 15⁰⁰-17⁰⁰ H 3005

2.1 Offene u. geschlossene Steuerung

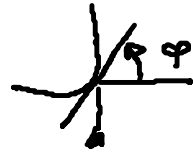
Lit.: F. Tröltzsch: Optimal Control of Partial Diff. Eqs. (AMS 2011)
 Skript V. Mehlmann: www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/ss11/
 Kontrolltheorie

Jan Lunze: Regelungstechnik (Springer Lehrbuch 2008)

Beispiel : Steuerung einer Parabolantenne, die auf einen Satelliten gerichtet ist

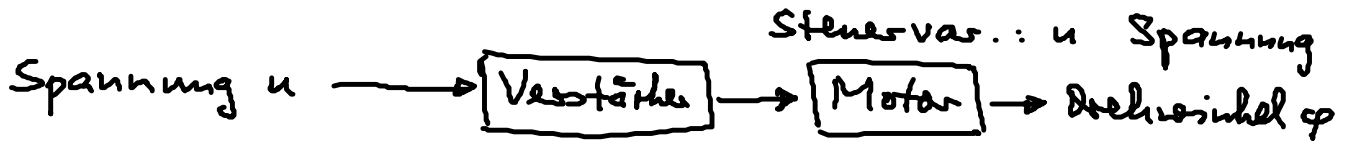
Beweg.gl. $\dot{\varphi} = \omega$

$$J\dot{\omega} = -r\omega + ku$$



Var.: φ Drehwinkel
 ω Winkelgeschw.

Par.: J Trägheitsmoment
 r Reibungskoeff.
 k Verstärk. faktor

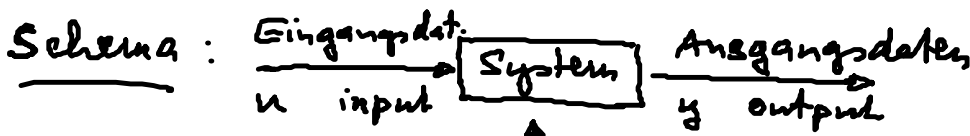


Ziel : Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u

\Rightarrow Finde $u(t)$, so dass eine Lösung des Systems
 $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Auf. bed. $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ex.

\Rightarrow Kriterium :
 - zeitoptimale Lösung
 - energieoptimale Lösung
 ...

Theor. / Mathemat. Grundlagen :



interne Dynamik: häufig unbekannt

z.B. Autofahrer: Eingänge
 - Gasgeben
 - Bremsen
 - Lenken

Ausgänge :
 - Tacho
 - Drehzahlmesser

interne Dynamik (Motor, Getriebe) unbekannt

Modell : $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) \end{cases}$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

\underline{u} : Steuerfkt. (control var., input)
 \underline{x} : Systemzustand (dynam. var.)
 \underline{y} : messbare Ausgangsgrößen (output)

\underline{f} : funktionaler Zus.hang des Systems } evtl. schwierig
 \underline{g} : " " der Messung } zu ermitteln,
interdisziplinäre
Zusammenarbeit

Def. Ein lineares Steuerproblem hat die Form

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \in [t_0, \infty) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{array}$$

Ausgangsgr. (output)

Dabei sind $\underline{x}(t) \in \underline{X}$ (Zustandsraum) $\underline{x} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\underline{y}(t) \in \underline{Y}$ (Ausgangsraum) $\underline{y} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $\underline{u}(t) \in \underline{U}$ (Eingangsraum) $\underline{u} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{U}$ sind Mengen von Funktionen auf $[t_0, \infty)$ -

→ Matrizen $\underline{A}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$

$\underline{B}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$

$\underline{C}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,n}$

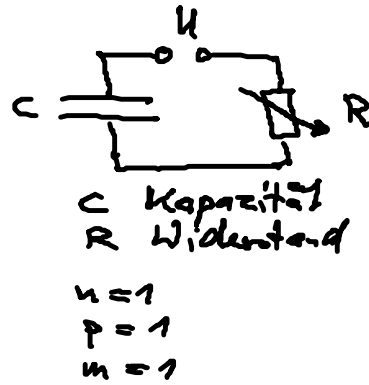
$\underline{D}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,m}$

NB : analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme (zeit k)

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_k \underline{x}_k + \underline{B}_k \underline{u}_k$$

Frage : Zus.hang Ausgang \underline{y} und Eingang \underline{u} ?
→ Transferfkt.

Beispiel: elektrischer Schaltkreis



Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung an C

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

Zustandsgl.: Kirchhoff-Gesetz

$$(I) \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC} q(t) + \frac{1}{R} U(t)$$

Vergleich mit allg. gl. liefert: $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{B} = \frac{1}{R}$

$$\underline{C} = 1, \underline{D} = 0$$

Lösung der Zustandsgl.

$$(I) \Rightarrow q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) q(t_0) + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) U(s) ds$$

Auf. bed. t_0

hier: Lösung der Zustandsgl. $\hat{=}$ Ausgangsplot.

Stabilität: i) asymptot. stabil: Realteile der Eigenwerte von \underline{A} negativ

ii) (schwach) stabil: Realteile der Eigenwerte von \underline{A} nicht positiv

z.B. ① Schaltkreis: Eigenwert von \underline{A} : $-\frac{1}{RC} < 0$

\Rightarrow asymptot. stabil

② Parabolantenne:

($n=2$)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} u$$

$u=1$

Eigenwerte von \underline{A} : $\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} - \lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(-\lambda) \left(-\frac{r}{J} - \lambda\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{r}{J} < 0 \end{cases}$$

\Rightarrow (schwach) stabil

Def.: Geg. System $\dot{x} = \underline{A}x + \underline{B}u$ mit $x(t_0) = x_0$

und Endzustand x_1 .

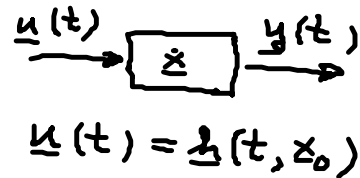
Das Paar (t_0, x_0) heißt zu Zeit $t_1 > t_0$ nach $x_1 = x(t_1)$ steuerbar, wenn es eine Steuerfkt. $u \in \underline{U}$ gibt, so dass die Lösung $x(t)$ mit dieser Steuerung $x_1 = x(t_1)$ erfüllt.

Das Paar (t_0, x_0) heißt nach x_1 steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit t_1 ($t_0 < t_1 < \infty$) nach x_1 steuerbar ist.

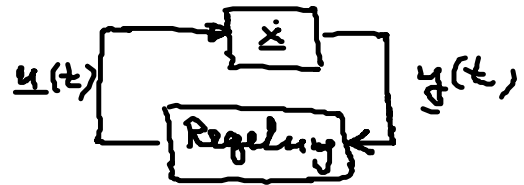
Wenn für jedes (t_0, x_0) und jedes x_1 das Paar (t_0, x_0) nach x_1 steuerbar ist, so heißt das System vollständig steuerbar.

Steuerung vs. Regelung

- Offener Kreis (Steuerung)
open loop control



- geschlossener Kreis (Regelung)
(Rückkopplung,
feedback control,
closed loop control)



z.B. Thermostat

$$u(t) = - \underline{F}(t) y(t)$$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das zeitinvariante System $\dot{x}(t) = \underline{A}x(t) + \underline{B}u(t)$ ist vollständig steuerbar.
- $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^{n,n}$ $\in \mathbb{R}^{n,m}$

- (ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{\underline{K}} := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{AB}} & \underline{\underline{A^2B}} & \dots & \underline{\underline{A^{n-1}B}} \\ \hline n \times m & n \times n & & & \end{array} \right)$$

n Stück

$n \times (n \cdot m)$ Matrix
Spalten

hat Rang n

(ii) Ist $\underline{\underline{p}} \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\underline{\underline{A^T}}$,
so gilt $\underline{\underline{p}}^T \underline{\underline{B}} \neq 0$

(iv) $\text{Rang} (\lambda \mathbb{1} - \underline{\underline{AB}}) = n \quad \forall \lambda$