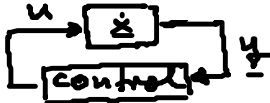


English Summary:

2. Control Concepts

2.1 Open and closed control



$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x & \text{system state (dyn. var.)} \in \mathbb{R}^n \\ y &= g(x, u) & u & \text{input (control var.)} \in \mathbb{R}^m \\ & & y & \text{output} \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Linear control problem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underline{A}x + \underline{B}u \\ y &= \underline{C}x + \underline{D}u \end{aligned}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x_1 = x(t_1)$$

Controllability: $\forall (t_0, x_0) \quad \forall x_1, \exists u: x_1 = x(t_1)$

\Leftrightarrow controllability matrix $\underline{K} := (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B})$
has rank n (Kalman criterion)

• Motivation des Kalman-Kriteriums $\text{Rang } \underline{K} = n$:


Lösung der Dgl.

$$x(t_e) = e^{\underline{A}t_e} x_0 + \int_0^{t_e} e^{\underline{A}(t_e-\tau)} \underline{B}u(\tau) d\tau$$

$$\int_0^{t_e} e^{-\underline{A}\tau} \underline{B}u(\tau) d\tau \approx \int_0^{t_e} \underline{B}u(\tau) d\tau - \int_0^{t_e} \underline{A}\underline{B}\tau u(\tau) d\tau + \int_0^{t_e} \frac{\underline{A}^2 \underline{B}}{2!} \tau^2 u(\tau) d\tau - \dots$$

$$x(t_e) = 0 \Rightarrow -x_0 = \underbrace{\underline{B}u_0}_{v_1} + \underbrace{\underline{A}\underline{B}u_1}_{v_2} + \underbrace{\underline{A}^2\underline{B}u_2}_{v_3} + \dots \quad \text{mit } u_k = (-1)^k \int_0^{t_e} \frac{\tau^k}{k!} u(\tau) d\tau$$

Bel. Werte x_0 können nur erzeugt werden, wenn die Vektoren v_k den ganzen Phasenraum aufspannen.

Beisp. ①  $\underline{A} = -\frac{1}{RC}, \quad \underline{B} = \frac{1}{R} \quad u=1$

$$\Rightarrow \underline{K} = (\underline{B}, \dots, \underline{A}^0 \underline{B}) = \underline{B} = \frac{1}{R} \neq 0$$

\Rightarrow Das System ist vollständig steuerbar

② Parabolantenne:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{J^2} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n=2 (x) \\ m=1 (u) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \underline{K} = (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{1}{J^2} \end{pmatrix} \quad \det K = -\frac{1}{J^2} \neq 0$$

$\text{Rang } \underline{K} = 2 \Rightarrow$ Das System ist vollständig steuerbar

2.2 Chaoskontrolle

Handbook of Chaos Control (Eds. E. Schöll, H.G. Schuster)
Wiley, 2008

Kriterien für Chaos

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbed.
- lokale Instabilität (pos. Lyapunov-Exponenten)
bei globaler Beschränktheit (seltsame Attraktoren)
- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokaler Instabilität
sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension = 3 (Überschneidung von Trajektorien
in 2D nicht möglich)
- wiederkehrende Trajektorien:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon > 0: \forall t \geq 0 \exists T(t, \varepsilon)$ mit $0 < T(t, \varepsilon) < T_\varepsilon$:
 $|x(t + T(t, \varepsilon)) - x(t)| < \varepsilon$ Poincaré-Wiederkehrzeit

lokal instabile Trajektorien kommen sich selbst auf lange Zeiten beliebig nahe.

\Rightarrow Ansatz für Kontrollmethoden in chaotischen Systemen:

- (i) kleine Änderung \Rightarrow große Wirkung
(Kontrolleingriff) (Veränderung der Stabilität)
- (ii) Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch in der Nähe eines Zielzustandes zu landen und diesen mit kleinen Kontroll eingriffen zu erreichen.

2.2.1 OGY - Kontrolle

Edward Ott } damals
Celso Grebogi } University of Maryland
James Yorke }

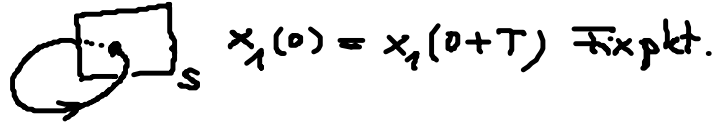
"Controlling Chaos", Phys. Rev. Lett. 54, 1196 (1990)

Idee: (i) Überführung von $\dot{x} = f(x, u)$ in eine diskrete Abb. mittels Poincaré-Schnitt

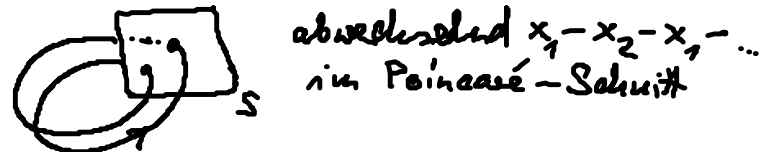
(ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustandes ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere $S = \{x : \sigma(x) = 0\}$ Fläche
 gl. der Fläche
 mit $\underline{x}(0) \in S$

Beispiel: Periode 1-Orbit



Periode 2-Orbit



Poincaré-Abb.: $\underline{x} \rightarrow \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ 1. Wiederholpt. auf Fläche S
 (return map) (Durchstoßpunkt)

\Rightarrow Folge von Punkten $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$
 und t_k Zeitpt. des k-ten Durchstoßens von S
 und $\underline{u}_k = \underline{u}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Dann kann man die Dgl. $\dot{x} = f(x, u)$ durch eine diskrete iterierte Abb. ersetzen:

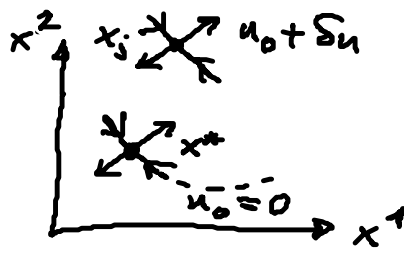
$$\tilde{x}_{k+1} = \underline{P}(\tilde{x}_k, u_k) \text{ mit } \tilde{x}_k = x_k - x_*$$

Abweichung \uparrow
v. Ziel durchstoßpt.

OGY-Kontrolle mittels:

$$u_k = \begin{cases} C \tilde{x}_k, & \text{wenn } |\tilde{x}_k| \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Kontrollsignal wird generiert, wenn die Trajektorie in der Nähe von x_* ist:



Idee: Fixpt. auf S so verschieben, dass nächstes x_{j+1} auf stab. Mannigfaltigkeit von x_* landet.

x_* Sattelpkt. in $\mathcal{D} \stackrel{\Delta}{=} \text{instab. period. Orbit im ursprüngl. Syst.}$

Ziel: stabilisiere x_* \rightarrow Stabilisierung eines UPO
(unstable periodic orbit)

Kontroll möglich, wenn es ein S_u zu jedem x_j in der Nähe v. x_* gibt.

Linearisierung des Systems in der Nähe des Zielpunktes

$$\tilde{x}_{k+1} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x^*} \tilde{x}_k + \left. \frac{\partial P}{\partial u} \right|_{u_0} (u - u_0) \quad (u \text{ skalar})$$

Verbindung von u mit Systemzust. x_k ?

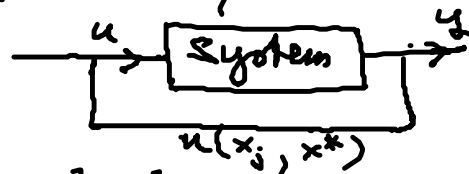
Aussatz: $u_k = \begin{cases} u_0 - \underline{c} \tilde{x}_k & \text{wenn } |\tilde{x}_k| \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Kontrollkoeff. zeigt in Richtung Ziel

Fixpkt. stabil, wenn die Beträge der Eigenwerte der Jacobimatrix des Abb. < 1 sind

$$\underline{A}^M = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_2}{\partial x^2} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_2}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x^* \\ u_0}}$$

\rightarrow Bed. für Eigenwerte $|\lambda| < 1$ liefert

Beziehung $c_1(x^*, u_0)$
 $c_2(x^*, u_0)$

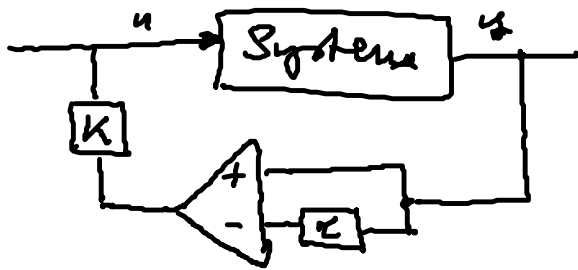


$$\underline{c} \tilde{x}_k = : c_1(x_j^1 - x_x^1) + c_2(x_j^2 - x_x^2)$$

- Nachteile:
- evtl. Wartezeiten
 - Kenntnis des Zielzustandes x^* nötig
 - Poincaré-Schnitt in Realität schwer zu bestimmen
 - rechenintensiv

2.2.2 Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Schema:



K. Pyragas:

"Continuous control of chaos
by self-controlling feedback"
Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

"time-delayed feedback" (TDF) oder Pyragas-Kontrolle

Idee: Verwende statt x^* eine zeitverzögerte Version des Ausgangs $y(t-\tau)$

Pyragas-Kontrolle: $\dot{x} = f(x) + \underline{K} (y(t-\tau) - y(t))$

Vorteil: - keine Kenntnis des Zielzustandes nötig
- nichtinvasiv: Kontrollkraft verschwindet, wenn Zielzustand erreicht ist

Beispiel: (i) Stabilisierung eines instab. period. Orbits der Periode T :

Wähle $\tau = T$, bei erfolgreicher Stabilisierung

$$x(t) = x(t-\tau) \Rightarrow u = 0$$

(ii) Stabilisierung von Fixpt.

z.B. Rössler-System (chaot. System)

$$\dot{x} = -y - z - K(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x - \mu)$$

Nichtlin.

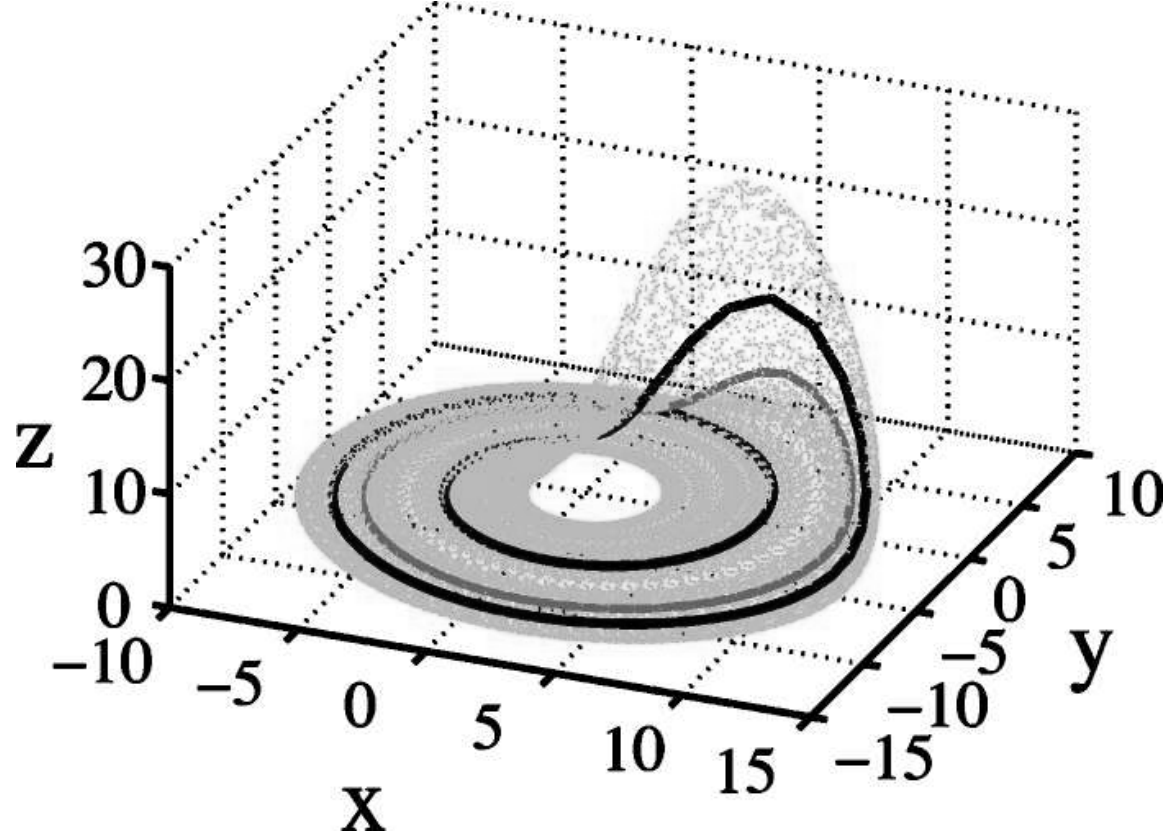
chaotisch für z.B. $a = 0.2, b = 0.2, \mu = 6.5$

Periode 1-Orbit mit $T_1 = 5.91679$

" 2-Orbit mit $T_2 = 11.82814$

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvasiv) für $0.24 < K < 2.3$

Balanov, Janson, Schöll = Phys. Rev. E 71, 016222 (2005)



Periode-1 orbit (rot)
Periode-2 orbit (schwarz)