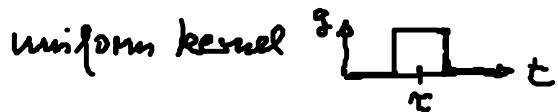


## English Summary:

### Feedback control with distributed delay

$$\dot{z}_i = (1 + i\omega_0)z_i - |z_i|^2 z_i + Ke^{i\theta} \left[ \int_0^\infty g(t') z_j(t-t') dt' - z_i(t) \right] \quad i, j = 1, 2$$

$$1 + i\omega_0 - Ke^{i\theta} - \lambda = \pm Ke^{i\theta} Lg(\lambda) \quad Lg(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t') dt'$$

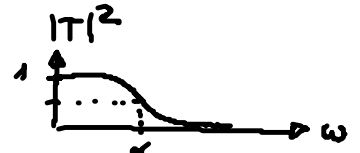


Laplace transform delay kernel



$\hat{=} \text{low pass filter}$   $\hat{Y}(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + i\omega} \hat{z}(\omega)$

$T(\omega)$  transfer fat

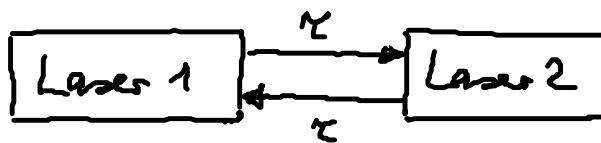


$$\hat{=} \dot{z}_i = \dots + Ke^{i\theta} (Y_j - z_i), \quad \dot{Y}_j = -\alpha Y_j + \alpha z_j \Rightarrow Y_j = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \alpha z_j(s) ds$$

## 4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

### 4.1 Zwei gekoppelte Hopf-Normalformen

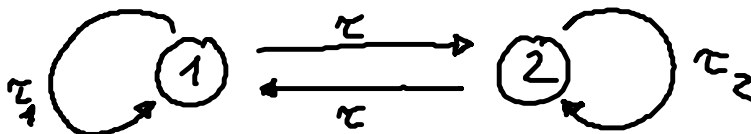
Motivation: (i)



Signallaufzeit  $\tau \neq 0$

Frage: wann sind beide Laser synchronisiert

(ii) Neuronen



$\tau, \tau_1, \tau_2 \neq 0$  i.a. (Signallaufzeit, neurovaskuläre Koppl., Ionenaustausch durch Zellmembran)

2 subkritische Hopf-Normalformen:  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z_1|^2)z_1 + a(z_2 - z_1)$$

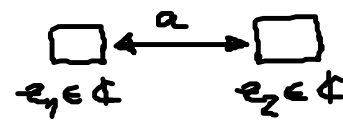
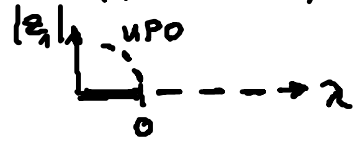
$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z_2|^2)z_2 + a(z_1 - z_2)$$

diffusive Kopplung

Lit.: B. Fiedler, Flunkert, Hövel, Schöll: Phil. Trans. R. Soc. A 368, 319 (2010)

oBdA:  $\omega = 1$

Hopf-Normalform (ohne Kopplung)



mit Kopplung: System beschrieben durch 4 dyn. Var.  $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re } z_1 \\ \text{Im } z_1 \\ \text{Re } z_2 \\ \text{Im } z_2 \end{pmatrix}$

Synchroner Zustand ( $z_1(t) = z_2(t) = z_{\text{sync}}(t)$ )

⇒ Kopplung verschwindet: 2 identische Systeme

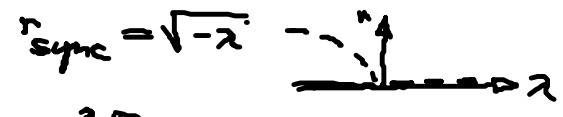
$$z_{\text{sync}} = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \dot{z}_{\text{sync}} = i r e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1 + i\gamma)r^2) r e^{i\varphi}$$

Re:  $\dot{r} = (\lambda + r^2)r$

Im:  $\dot{\varphi} = 1 + \gamma r^2$

- instabiler period. Orbit (UPO):  $\dot{r} = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$



Phase des UPO:  $\varphi = \omega t \equiv \frac{2\pi}{P_+} t$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P_+} = 1 + \gamma r_{\text{sync}}^2 = 1 - 2\gamma$$

$$P_{\text{sync}} = P_+ = \frac{2\pi}{1 - 2\gamma}$$

- Lösung für synchron. Zustand

$$z_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda} \exp\left[\frac{2\pi i}{P_{\text{sync}}} t\right]$$

Weitere spezielle invariante Lösungen im gekoppelten System?

Verwende neue Koord.:  $z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  symm., synchron.

$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$  antisymm., gegenphasig

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{f(z_1)}_{\text{Hopf-NF}} + \underbrace{f(z_2)} + a(z_2 - z_1) + a(z_1 - z_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)] \quad \begin{array}{l} z_1 = z_+ + z_- \\ z_2 = z_+ - z_- \end{array}$$

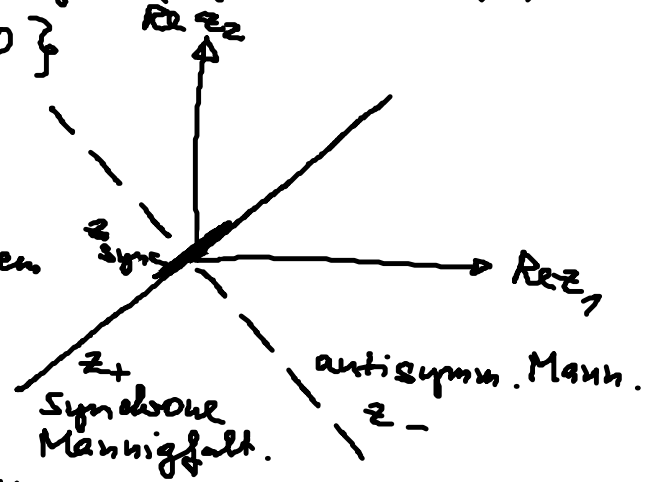
$$\dot{z}_- = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = \frac{1}{2} [f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)] - 2az_-$$

- Menge gleichphasiger Lösungen (symmetr. Lösungen)

$$Z_+ := \{ (z_+, z_-) \mid z_- = 0 \}$$

$$z_+ = z_{\text{sync}}$$

also  $\dot{z}_{\text{sync}} = f(z_{\text{sync}})$   
wie ungekoppeltes System



- Menge der gegenphasigen Lösungen

$$Z_- := \{ (z_+, z_-) \mid z_+ = 0 \}$$

$$\text{d. h. } z_1 = -z_2$$

$$\Rightarrow \dot{z}_+ = \frac{1}{2} (f(0 + z_-) + f(0 - z_-))$$

$$= \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) = 0$$

da  $f$  kub. Fkt.  
(ungerade) von  $z$

$$\Rightarrow \text{Lösung für } z_- : \dot{z}_- = \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) - 2az_-$$

$$= f(z_-) - 2az_-$$

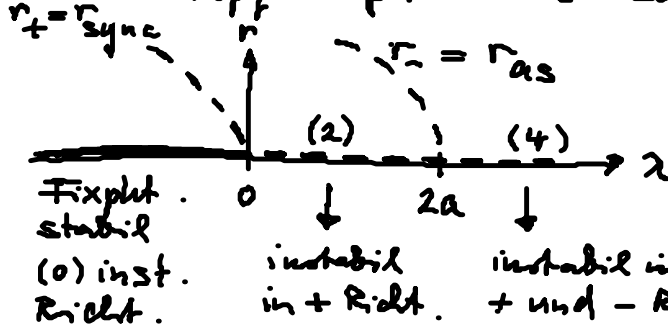
$$z_{as} = z_- = r_- \exp\left[\frac{2\pi}{P_-} t\right] = (\lambda + i + (1 + i\gamma)) |z_-|^2 z_- - 2a z_-$$

mit  $r_- = \sqrt{-(\lambda - 2a)}$

Periode  $P_- = \frac{2\pi}{1 + r_-^2 \gamma} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a)\gamma}$

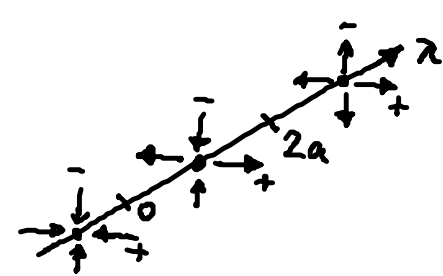
Fazit: Gegenphasiger period. Orbit verschwindet in einer

Hopf-Bif. bei  $\lambda = 2a$



(4) inst. Richt. des Fixpt.  $e_3$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wunsch: Stabilisierung der period. Lösungen  $r_+$ ,  $r_-$

- Möglich durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle
- (i)  $r_{sync}$  wurde in § 3.2.2 durch Wahl  $\tau = P_+$  stabilisiert
  - (ii)  $r_{as}$  stabilisierbar durch zeitverzögerte Rückkoppl.kontrolle mit halber Periode  $\tau = \frac{P_-}{2}$
- (Stab. des Fixp. soll umgedreht werden:  $\rightarrow \uparrow \downarrow \leftarrow -$ )

Begründung: 
$$z_-(t - \frac{P_-}{2}) = r_- \exp\left(\frac{2\pi i (t - \frac{P_-}{2})}{P_-}\right)$$

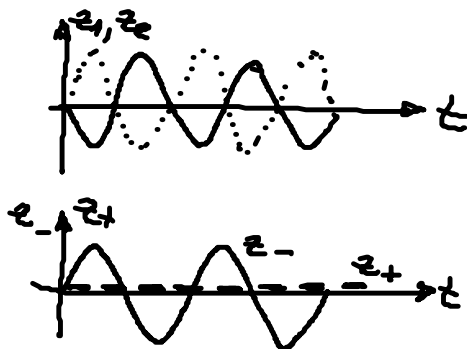
$$= r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right) \underbrace{\exp(-\pi i)}_{-1}$$

$$= -r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right)$$

$$\Rightarrow z_1(t) = z_+ + z_- = z_-(t) = -z_-(t - \frac{P_-}{2}) = z_2(t - \frac{P_-}{2})$$

analog:  $z_2(t) = z_1(t - \frac{p_-}{\omega})$

gegenphasige Ose,



Systemgl. mit nichtinvarianter Kontrolle:  $b \in \mathbb{R}$

$$(I) \dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_2(t-\tau) - z_1(t))$$

$$(II) \dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t-\tau) - z_2(t))$$

= 0 für  $\tau = \frac{p_-}{\omega}$  auf  $z_-$

NB: Diese Kontrolle ist invariant auf dem gleichphasigen Orbit  $z_+$

Frage: Welche  $b$  stabilisieren  $z_-$ ?

In  $z_+$  und  $z_-$ -Koordinaten lautet (I), (II):

$$(I') \dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$(II') \dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) - 2az_- + b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von  $z_- = r_- e^{i\varphi_-}$ :  
 Untersuche Stabilität des Fixp. im Ursprung!

$\Rightarrow$  linearisiere (I'), (II') um  $z_1 = z_2 = 0$  ( $z_+ = z_- = 0$ )

$$\begin{aligned} \dot{z}_+ &= \frac{1}{2}[(\lambda + i)(z_+ + z_-) + (\lambda + i)(z_+ - z_-)] + b[z_+(t-\tau) - z_+(t)] \\ &= (\lambda + i)z_+ + b(z_+(t-\tau) - z_+(t)) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i)z_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

NB: Linearisierung entkoppelt  $z_+$  und  $z_-$

Ausatz  $z_{\pm} \sim e^{\lambda t}$  ( $\lambda$  Eigenwert)

Untersuche Stabilität des Fixpt. bei  $\lambda = 2a$  mit  $\tau = \frac{p_-}{2}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{p_-}{2} = \frac{2\pi}{2(1 - (\lambda - 2a)\tau)} = \pi$$

$\uparrow$   
 $\lambda = 2a$  (am Bif. pt. von  $z_{as}$ )

char. Gln. (am Bif. pt.  $\lambda = 2a$ ):

$$z_+ : 0 = \lambda + i + b(e^{-\lambda\tau} - 1) - \lambda$$
$$= \downarrow 2a + i + b(e^{-2\pi} - 1) - \lambda \quad (*)_+$$

$$z_- : 0 = \cancel{2a} - \cancel{2a} + i - b(e^{-2\pi} - 1) - \lambda \quad (*)_-$$

Suche Hopf-Kurven in  $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ -Ebene, die  $\text{Re } \lambda = 0$  erfüllen, d. h. Grenzen, an denen die instab. Dim. des Fixp. sich ändert. Dann wird ein delay-induzierter Orbit generiert, der zum Stab. austausch mit dem gegenphasigen Pyragas-Orbit gebraucht wird (transkrit. Bif.).

Parametrisierung der Hopf-Kurven ( $\lambda = 0 + i(1 + 2\omega)$ )  $b = b(\omega)$

↳ Einsetzen in  $(*)_+$  und Umformen nach  $b$  liefert  $b_+(\omega)$ -Kurve  
↳ Einsetzen in  $(*)_-$  liefert  $b_-(\omega)$

$$b_+(\omega) = a + \omega \tan(\pi\omega) + i(-\omega + a \tan \pi\omega)$$

$$b_-(\omega) = -\omega \cot(\pi\omega) - i\omega$$

