

English Summary:

Networks

topology given by adjacency matrix $a_{ij} = 1$ if link $i \leftrightarrow j$ exists

node degree $k_i = \sum_j a_{ij}$

$i, j = 1, \dots, N$ nodes

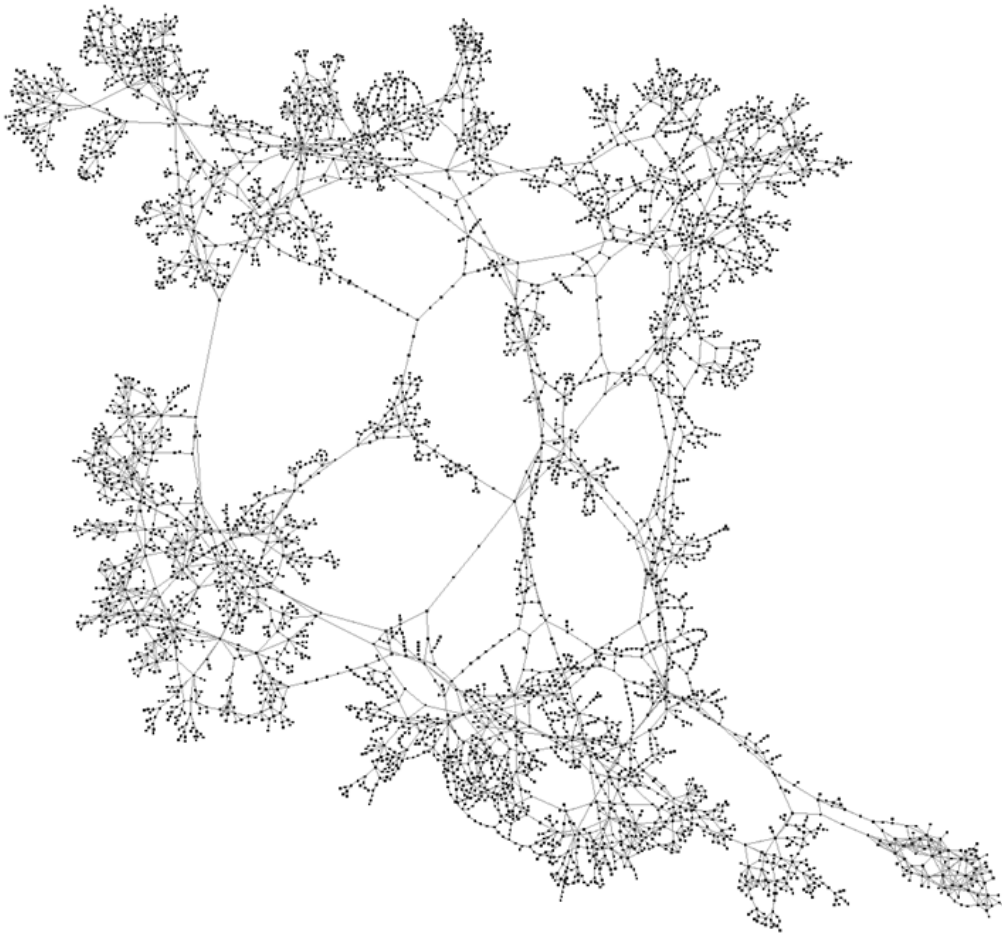
degree distribution $P(k)$

mean degree $\langle k \rangle = \sum_k P(k)k$

mean path length l

cluster coefficient C_i

- regular ring (nonlocal coupling of range $r = \frac{L}{N}$)
- global coupling (all-to-all)
- random network (Erdős-Rényi)
- small-world (large C_i , small l)
- scale-free ($P(k) \sim k^{-\alpha}$)



US power grid
(Stromnetz)



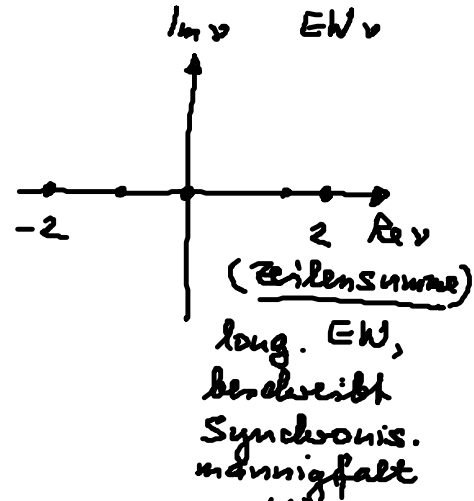
power
blackout
in den USA
2003

- Eigenwertspektrum von \underline{A} oder \underline{G} beschreibt die Topologie Netz, $N=8$

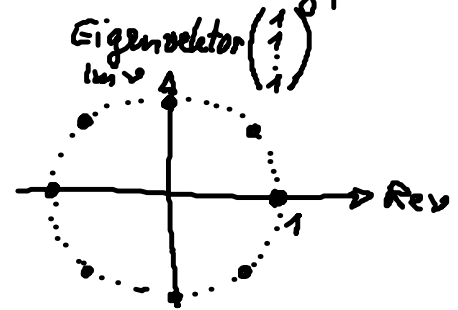
z.B.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix}$$



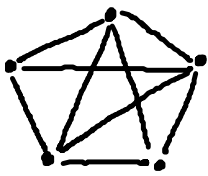
$$v_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

$$k=1, \dots, N$$

Verallgemeinerung: circulante Matrizen

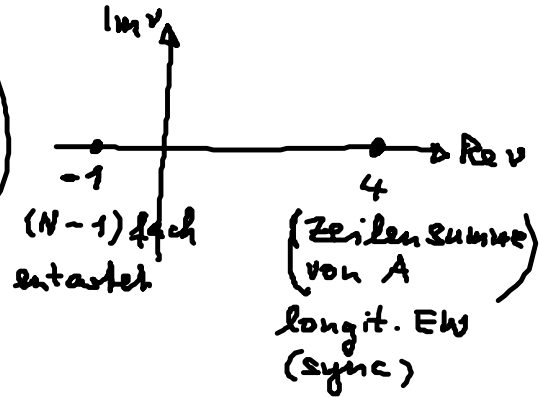
$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $v_k = \chi\left(e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right)$, $\chi(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \dots + c_{N-1} v^{N-1}$



vollständ. Graph
(all-to-all)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



4.2.2 Kopplungsschemata

dynam. Var. auf jedem Knoten $x_i \in \mathbb{R}^m$

- Kopplungsschema \underline{H}_{ij} ($m \times m$ Matrix) gibt an, wie die Variablen der Knoten i und j koppeln
 \Rightarrow dynam. Gln.

Beispiel: gekoppelte Laser: dynam. Var. $\underline{x} = \begin{pmatrix} E \\ n \end{pmatrix}$ el. Feld
 Ladungsträgerdichte

$$m=2, \text{ z.B. } H_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Feld koppelt an
Feldvariable

- opt. Kopplung: Feldvar. i an Feldvar. j (Spiegel)
- elektroopt. Koppl.: Feldvar. i an Ladungsträgervar. j
- Selbstkopplung (Lang-Kobayashi-Modell):
Feld i koppelt an Feld i (Spiegel)

2 Hopf-Normalform (§4.1): $\underline{x} = \begin{pmatrix} \text{Re } z \\ \text{Im } z \end{pmatrix}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S^1 -symm. brechende Kopplung nur über $\text{Re } z$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Differenzialgl. System aller Elemente

$x_i \in \mathbb{R}^m$, $i=1, \dots, N$ (in Dim. des Phasenraumes eines Elements)

$$\dot{x}_i = \underline{F}_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} x_j$$

lokale Dyn.,
z.B. Hopf-
Normalform
↑
Topologie
($N \times N$)
↑
Kopplungsrahmen
($m \times m$)

Kopplungsstärke

zeitverzögert gekoppelte Netzwerke:

• direkte Kopplung

$$\dot{x}_i = \underline{F}_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} x_j(t - \tau_{ij})$$

Beispiel: Laser mit Feedback

$$(N=1, a_{ij}=1)$$

$\tau_{11} = \tau_{ex}$ (round-trip-Zeit zum Spiegel)

• diffusive Kopplung

$$\dot{x}_i = \underline{F}_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t)]$$

Beispiel: Neuronenkopplung

Input ist Potenzialdifferenz

Bem.: beides in einander umformen durch

$$\tilde{\underline{F}}_i = \underline{F}_i - \sigma \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} \right) x_i$$

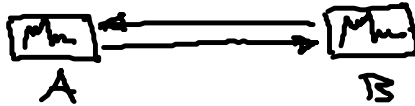
(geänderte lokale Dynamik)

4.3 Synchronisation von Netzwerken

Synchronisation und Desynchronisation:

• erwünschter Effekt :

z.B. Synchronisation von Lasern
(verschlüsselte Kommunikation durch chaot. Synchron.)



Synchronisation der Neuronen im Gehirn
(Lernvorgänge, Gedächtnis, Wahrnehmung)

• unerwünschter Effekt :

z.B. patholog. Zustände im Gehirn (Synchron. Feherrn)
(Parkinson, Tremor, Epilepsie)

Schwingungen der London Millennium Bridge (2000)
durch spontane Synchron. der Fußgänger

lit. : Pikovsky, Rosenblum, Kurths : Synchronisation
(Cambridge University Press 2001)

4.3.1 Voraussetzung für Synchronisation aller Elemente

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} H_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \quad \begin{array}{l} x_i \in \mathbb{R}^m \\ i=1, \dots, N \end{array}$$

• $F_i = F$ alle Elemente gleiche lokale Dynamik

• $\tau_{ij} = \tau$ " gleiche Signallaufzeiten

• $\sum_{j=1}^N G_{ij} = \text{const. } \forall i$ alle Elemente bekommen im Fall der Synchron. das gleiche Eingangssignal

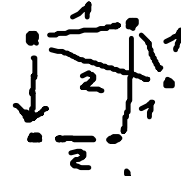
$$\text{oBdA: } \sum_{j=1}^N G_{ij} = 1$$

$$\text{oder } \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \rightarrow \sum_j \tilde{G}_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} = \sigma \left(\frac{\text{konstante}}{\text{Zeilensumme}} \right)$$

= long. Eigenwert
von \tilde{Q}

zur synchron.
Mannigfaltigkeit

konstante Zeilensumme erreicht man durch Wahlung
der Links



• $\underline{\underline{H}}_{ij} = \underline{\underline{H}}$ identische Kopplungs-schemata $\underline{\underline{H}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

\Rightarrow Dynamik auf der isochronen Synchronisations-
mannigfaltigkeit gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}_s = \underline{F}(\underline{x}_s) + \sigma \underline{\underline{H}} \underline{x}_s(t-\tau) \quad \underline{x}_s = x_i(t) \quad \forall i$$

↑
long. EW von \tilde{Q}

entspricht der Dynamik eines einzelnen Elements
mit zeitverzögerter Rückkopplung

(vgl. §4.1 gleichphasige Lösung)

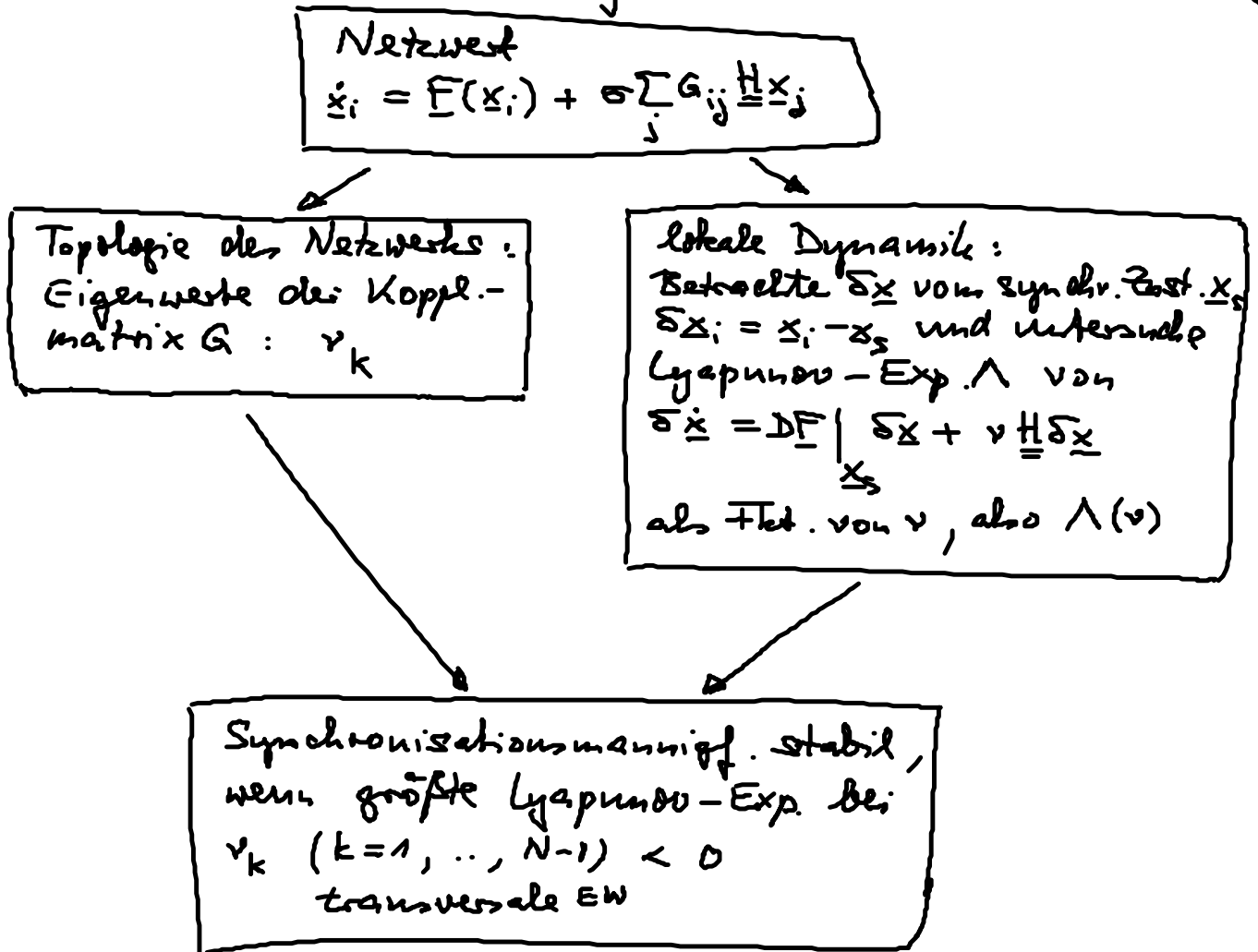
v_1, \dots, v_{N-1} transversale EW von \tilde{Q}
 \rightarrow wichtig für Untersuchung der
Stabilität der synchronen Lösung

Frage: Ist die Dynamik in Synchron.mannigfalt.stabil?

4.3.2 Master Stability Function (MSF)

L.M. Pecora, T.L. Carroll, PRL 80, 2109 (1998)
(Netzwerke ohne Zeitverzögerung)

Schema zur Bestimmung der Stabilität der synchron. Lösung:



MSF = größter Lyapunov-Exp $\Lambda(\nu) \quad \nu \in \mathbb{C}$
 Synchron. lös. stabil $\Leftrightarrow \Lambda(\nu_k) < 0 \quad (k=1, \dots, N-1)$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{aus} & \text{aus} \\ \text{Dyn.} & \text{Topol} \end{matrix}$

Vorteile: Wenn $\Lambda(\nu)$ einmal berechnet ist,
kann Stab. für beliebige Topologien
betrachtet werden
(Separ. von Topologie u. lokaler Dynamik)

NB: - analog für diskrete Abb. (statt Dgl.)
- sowohl period. als auch chaot. synchron. Lösungen
untersuchbar