

English Summary:

Synchronization of networks

$$\dot{x}_i = \underline{F}(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \underline{H} x_j(t-\tau) \quad x_i \in \mathbb{R}^m, i=1, \dots, N$$

$$\text{necessary cond.: } \sum_{j=1}^N G_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\text{Synchronized sol.: } \boxed{\dot{x}_s = \underline{F}(x_s) + \sigma \underline{H} x_s(t-\tau)} \quad x_s \equiv x_i$$

Master stability fet. (MSF) = largest Lyapunov exponent $\Lambda(v)$
 $v \in \mathbb{C}$

synchr. sol. is stable $\Leftrightarrow \Lambda(v_k) < 0 \quad (k=1, \dots, N-1)$
↑ ↑
Dyn. topol. transverse eigenvalues

$$v_N \equiv \sigma = \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} \quad \text{long. eigenvalue} \hat{=} \text{eigenvector} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Herleitung der Master Stability Fet.

(a) $\dot{x}_i = \underline{F}(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \underline{H} x_j$ $x_i \in \mathbb{R}^m$ (einzelnes Element),

(b) $\dot{x} = \underline{F}(x) + \sigma (\underline{G} \otimes \underline{H}) x$ $x \in \mathbb{R}^{mN}$ (komplettes Netzwerk)

(c) Linearisierung um den synchr. Zustand $\delta x = x - x_{\text{sync}} \in \mathbb{R}^{mN}$
 $\delta \dot{x} = \underline{DF}(x_{\text{sync}}) \delta x + \sigma (\underline{G} \otimes \underline{H}) \delta x$

(d) Diagonalisierung von Kopplungsmatrix $\underline{G} \begin{pmatrix} \text{Ann. } \sum_j G_{ij} = \text{const.} \\ \sum_j \tilde{G}_{ij} = \sigma \end{pmatrix}$

$$\delta \dot{x}_i = \underline{DF}(x_{\text{sync}}) \delta x_i + v_k \underline{H} \delta x_i \quad x_1 = \dots = x_N \in \mathbb{R}^m$$

für Eigenwerte $v_k, k=1, \dots, N$ ($v_N = \sigma$ long. EW)

(e) Verwende $v = \kappa + i\beta$ als Parameter und berechne $\Lambda(v)$ (MSF)

(f) Test, ob $\Lambda(v_k) < 0$ für alle v_k vom geg. \tilde{G}
für Stab. der synchr. Lös. ($k=1, \dots, N-1$)
transv. EW

NB: $\Lambda(v_N) > 0$ chaot. sync. Lös.

$\Lambda(v_N) = 0$ period. sync. Lös.

Verallgemeinerung auf zeitverzög. Kopplung $\Rightarrow x_j(t-\tau)$
 $x(t-\tau)$ } im
 $\delta x(t-\tau)$ } Koppl.
transv.

4.3.3 Stabilität der synchr. Lös. für großes τ

V. Flunkert, S. Tanelnik, T. Dahms, E. Schöll: PRL 105, 254101 (2010)

$\Lambda_{\max}(\sigma) > 0$ chaot. Dyn.
 ≤ 0 period. Dyn. / Fixpt.

$\Lambda_{\max}(v_k) < 0$ sync stabil } $k=1, \dots, N-1$
 > 0 " instabil } (v_{\max})

Struktur der MSF für großes Delay:

- $\Lambda_{\max}(re^{i\varphi})$ ist rot. symm.: $\Lambda_{\max}(r)$
- $\Lambda_{\max}(0) < 0$ und monoton wachsend mit r ,
 $\Lambda_{\max}(r)$ wird positiv bei $r=r_0$
oder
 $\Lambda_{\max}(0) > 0$ und dann überall konstant $\forall r$

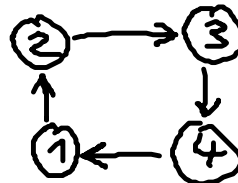
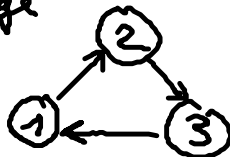
Universelle Klassifikation von Netzwerken mit großem τ

class	chaot. sync. Dyn. ($r_0 < \sigma $)	nichtchaot. sync. Dyn. ($r_0 > \sigma $)
(A) $ v_{\max} < \sigma $	sync stabil $\Leftrightarrow v_{\max} < r_0$	sync. stabil
(B) $ v_{\max} = \sigma $	sync. instabil	sync. stabil
(C) $ v_{\max} > \sigma $	sync. instabil	sync stabil $\Leftrightarrow v_{\max} < r_0$

↑
 Heiligenthal et al., PRL 107, 234102 (2011)

Klasse B und C - Beispiel

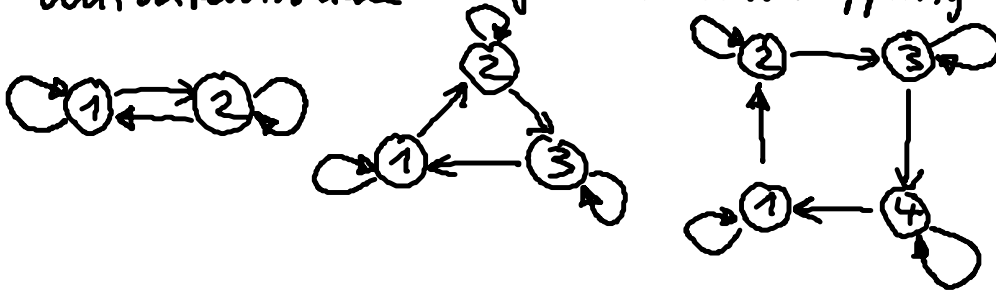
- unidirekt. Ringe



- Netzwerke mit Zeilensumme $\sigma = 0$

Klasse A :

- unidirektionale Ringe mit Rückkopplung



- bidirektion. Ringe
- all-to-all coupling
- Netzwerke, die nur exzit. (attraktiv) oder nur inhib. (repulsiv) gekoppelt sind (Klasse A oder B)

4.4 Netzwerke aus Hopf-Normalformen

C.U. Choe, Dahms, Hönel, Schöll: PRE 81, 025205(R) (2010)

- ausgehend von §4.1 nun N gekoppelte Hopf-Normalformen

$$\dot{z}_j = (\lambda + i - (1 + iy) |z_j|^2) z_j + \sigma \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t)) \quad (\text{I})$$

$\omega=1$ ↑ Superkrit.

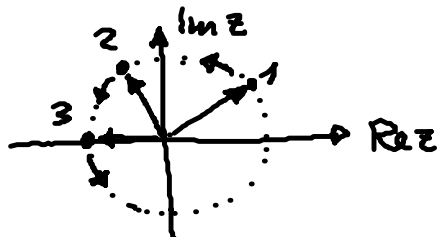
Kopplungsstärke $\sigma = K e^{i\beta} \in \mathbb{C}$

Kopplungsmatrix G

Oszillatoren $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$

4.4.1 Cluster-Synchronisation

Verallgemeinerte Synchronisationszustände:



Merry-go-round

- Wir suchen D_m -invariante Zustände, für die gilt:

$$\dot{r}_j = 0 \quad (\text{konst. Amplitude})$$

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_m \quad (\text{gemeinsame konst. Frequ.})$$

Annahme: gleiche Amplitude aller Ose., konst. Phasenunterschied

$$\left. \begin{aligned} r_j &= r_{0,m} \\ \varphi_j &= \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}) \quad m \in \mathbb{N}$$

Index m klassifiziert mögliche Clusterzustände:

$m=0$ Synchrone in-phase Lösung
(zero-lag)

$$r_j = r_{0,0}$$

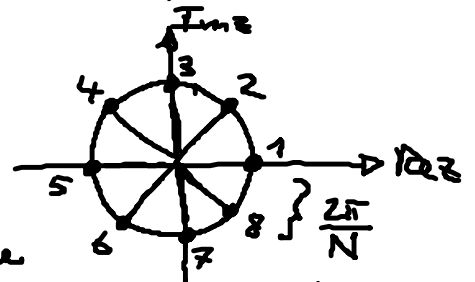
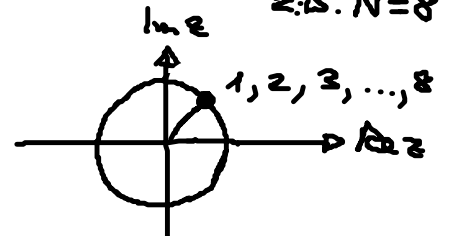
$$\varphi_j = \Omega_0 t$$

$m=1$ Splay state

$$r_j = r_{0,1}$$

$$\varphi_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$

jedes Osz. hat andere Phase, aber immer gleichen Abstand zum Nachbarn (merry-go-round) Karussell



Bem.: für $N=2$ entspricht Splay-Zustand der gegenphasigen Lösung $z_1 = -z_2$

$m > 1$ Cluster-Zustände (in Phase innerhalb des Clusters, konst. Phasendiff. zwischen Clustern)

Zahl vorhandener Cluster M

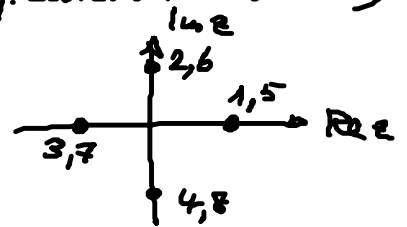
geg. durch kleinstes gemeins.

Vielfaches von m und N

geteilt durch m

$$M = \frac{\text{LCM}(m, N)}{m}$$

Least Common Multiple



Beispiel: $N=8, m=2 \Rightarrow M = \frac{\text{LCM}(8, 2)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Bestimmen der invar. Lösungen von (I) durch Einsetzen von (II) in (I):

$$r_{0,m}^2 = \left[2 - \left(\sum_{n=1}^N G_{jn} \right) K \cos \beta + K \sum_n G_{jn} \cos(\varphi_{nm}) \right]$$

$$\Omega_m = 1 - \gamma r_{0,m}^2 - \left(\sum_{n=1}^N G_{jn} \right) K \sin \beta + K \sum_n G_{jn} \sin(\varphi_{nm})$$

$$\varphi_{nm} = \beta - \Omega_m \tau + (n-j) \frac{2\pi m}{N}$$

$$\sum_n G_{jn} = \text{const.} = \mu$$

Lösung für in-phase Zustand ($m=0$):

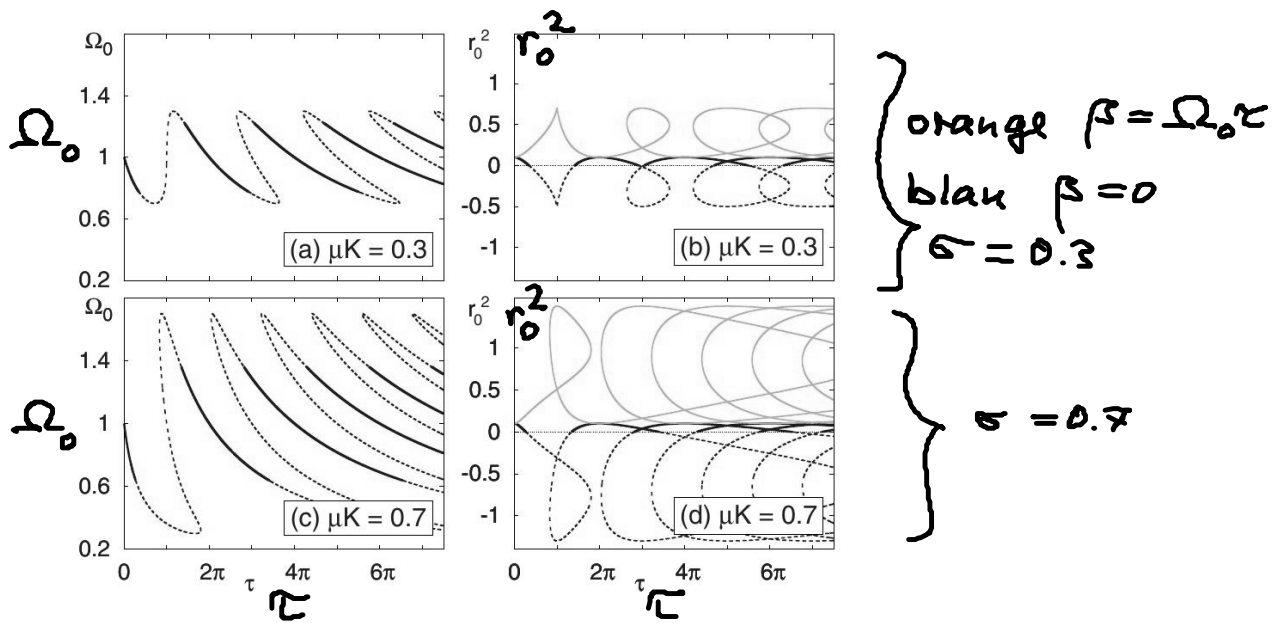


FIG. 1. (Color online) Collective frequency Ω_0 (left) and squared amplitude r_0^2 (right) of in-phase oscillation ($m=0$) vs time delay τ for different amplitude of the feedback strength [$\mu K=0.3$ and 0.7 in (a), (b) and (c), (d), respectively]. Black (blue) and gray (yellow) curves correspond to a feedback phase $\beta=0$ and $\beta=\Omega_0\tau$, respectively. Unphysical solutions ($r_0^2 < 0$) are dashed. For $\beta=\Omega_0\tau$ the curves in (a) and (c) have the same shape, but no unphysical solutions occur. Parameters: $\lambda=0.1$, $\omega=1$, and $\gamma=0$.

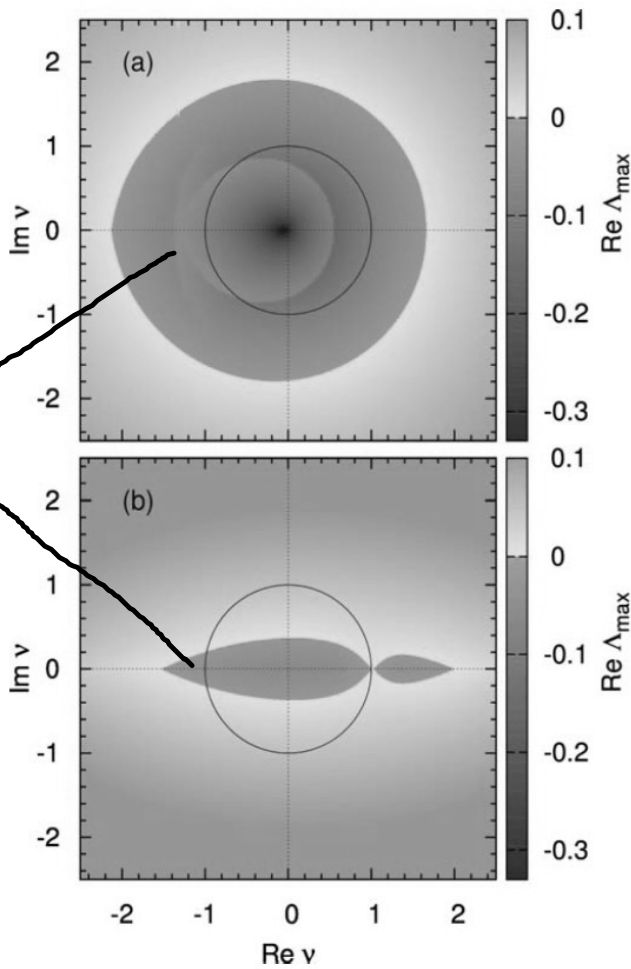
4.4.2 Stabilität der Lösungen

bisher: nur Existenz

jetzt: Stab. berechnen mit MSF = größter Lyapunov-Exp.
 $\lambda_{\max}(\nu)$
 ν : transv. EW der Kopplungsmatrix G

- Hier λ außerdem Fkt. von K und τ , also die synchr. Mannigfaltigkeit von K und τ abhängt.
- Berechnung von λ_{\max} hier analyt. möglich, weil Jacobi-Matrix für Stuart-Landau-Osc. nicht zeitabh. ist

$m=0$ (in phase), $\beta=0$, $\lambda=0.1$, $\gamma=0$
 sync



stab.

Schwarzer Kreis: unidirekt. Ring
 $v_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$ auf dem Einheitskreis

$$\sigma = K\mu = 0.3$$

$$\tau = 2\pi$$

synchro. Lös. stabil

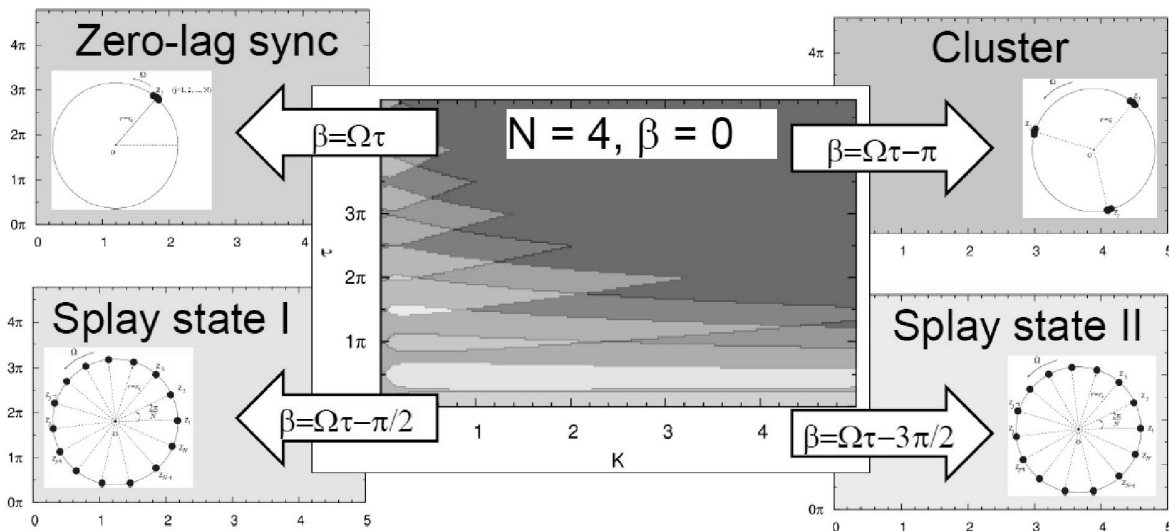
$$\sigma = K\mu = 0.08$$

$$\tau = 0.52\pi$$

synchro. Lös. instabil

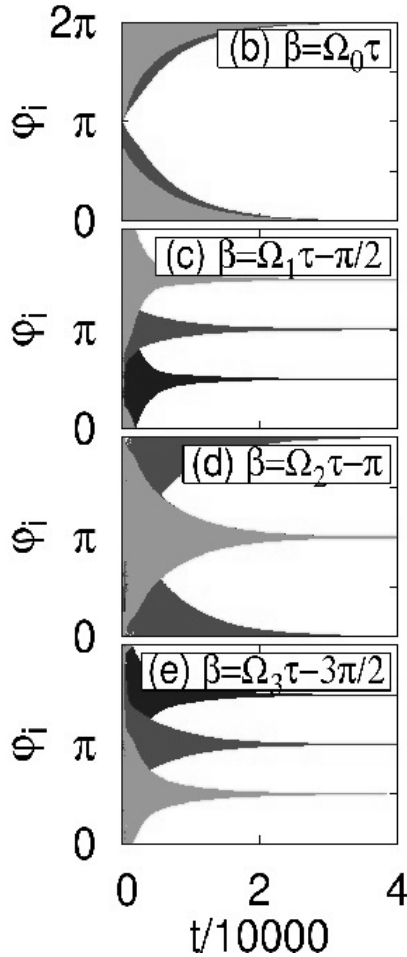
(v_k können außerhalb Stab. Bereich liegen)

(K, \tau) - Ebene für unidirektionalen Ring
 $m \geq 0$:



$$\beta = \Omega_m \tau - \frac{2\pi m}{N}$$

sichert Stab. in der ganzen (K, \tau) - Ebene



$\tau = 3\pi$, $\sigma = 0$
 φ_i relativ zu φ_j

in Phase

splay

cluster

anti-splay

Maß für Synchronisation (für in-phase)
 Kuramoto - Ordnungsparameter

$$R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j}$$

$|R| = 1$ in-phase

$|R| \approx 0$ Desynchron. oder aber z.B. splay state