

English Summary: Application to neurodynamics

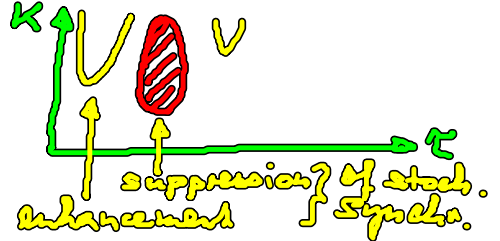


control of noise-induced osc. of 2 coupled neurons (FHN model)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + C(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 &= x_1 + a + D_1 \xi_1(t) + K[y_1(t - \tau) - y_1(t)] \\ \epsilon_2 \dot{x}_2 &= x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + C(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 &= x_2 + a + D_2 \xi_2(t) \end{aligned} \right\} \text{Stochastic synchr.}$$

$$\frac{\langle T_1 \rangle}{\langle T_2 \rangle} \lesssim 1$$

modulation of stoch. synchr. by τ :



6.2 Kontrolle zeitverzögert gekoppelter Neuronen

Schöll, Hübner, Hövel, Dabau. Phil. Trans. Roy. Soc. A 367, 1079 (2009)

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + C[x_2(t - \tau^c) - x_1(t)] + K[x_1(t - \tau^k) - x_1(t)] \\ \dot{y}_1 &= x_1 + a \\ \epsilon \dot{x}_2 &= x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + C[x_1(t - \tau^c) - x_2(t)] + K[x_2(t - \tau^k) - x_2(t)] \\ \dot{y}_2 &= x_2 + a \end{aligned}$$

kein Rauschen!

Anregbares Regime ($a = 1.05$): Einzelsystem hat stab. Fixpt.

(i) keine Kontrolle ($k=0$)

gekoppeltes System: symm. Fixpt. $x_i^* = -a$, $y_i^* = \frac{a^3}{3} - a$ stabil

$$\delta \underline{\dot{x}} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} A & -1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -1 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \delta \underline{x} + \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta \underline{x}(t - \tau^c)$$

$$A = 1 - a^2 - C$$

$$\text{char. gl. } (1 - A\lambda + \epsilon\lambda^2)^2 - (\lambda C e^{-\lambda\tau^c})^2 = 0$$

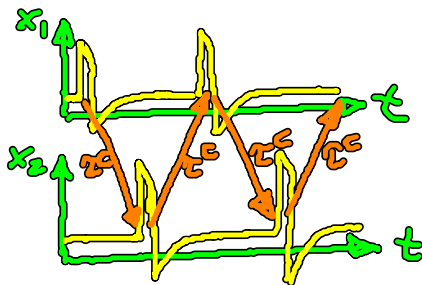
Faktorisierung! Keine Hopf-Bif., denn Ansatz $\lambda = i\omega$ in
 Im der faktorierten char. gl.:

$$A = \pm C \cos \omega\tau^c$$

$$A = -|a^2 + c - 1|, |A| = \underbrace{a^2 - 1 + c}_{> 0} > C$$

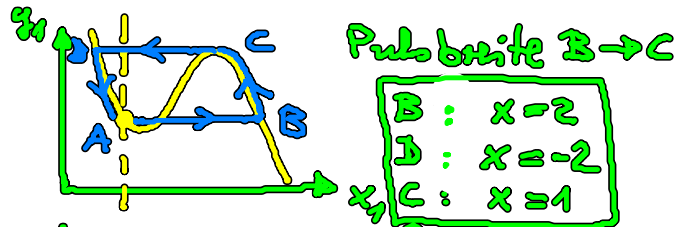
Obwohl der symm. Fixpt. immer stabil ist, kann
 durch Delay eine period. Osz. (Grenzzyklus)
 induziert werden (globale Bif.):

Delay-induz. Antiphase-Osz.



Periode $T = 2\tau^c$ (vorausgesetzt,
 τ^c ist groß genug
 $>$ recovery time
 (Refraktanzzeit))

Näherung für Pulsbreite:



langsame Phasen $B \rightarrow C$, $D \rightarrow A$: $\dot{y}_1 \approx x_1 - \frac{x_1^3}{3}$ (x_1 -Nullisokline)
 (firing) (refraktär)

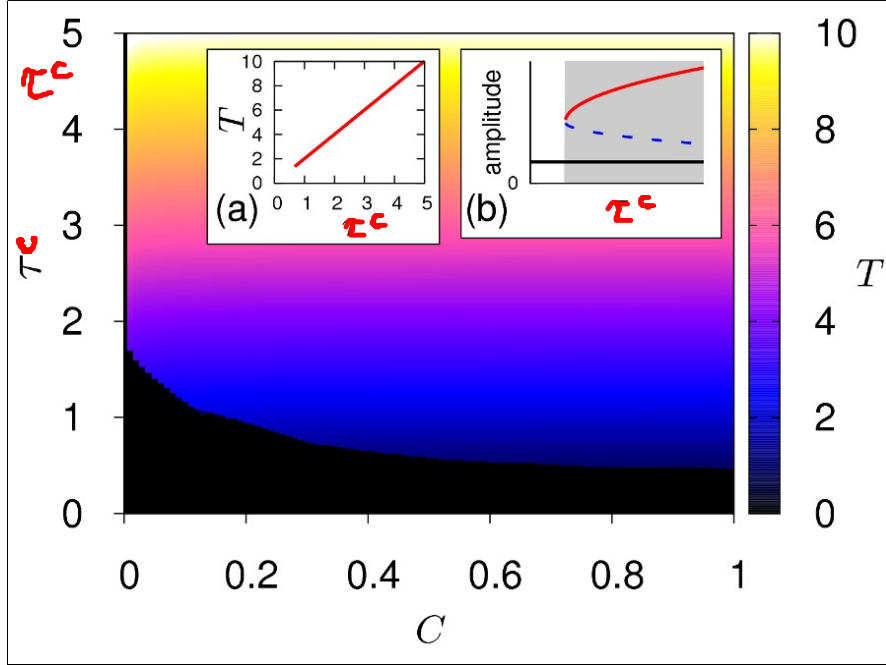
$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}_1 (1 - x_1^2) = x_1 + a$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_1 + a}{1 - x_1^2} \Rightarrow \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} dx_1 = dt$$

$$\int_{\pm 2}^x dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a \pm 2}{a + x} - a(\pm 2 - x) + 2 - \frac{x^2}{2} = t$$

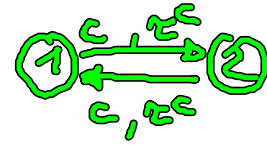
Pulsbreite $B \rightarrow C$:

$$T_f = \int_{-2}^1 dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a + 2}{a + 1} - a + \frac{3}{2}$$

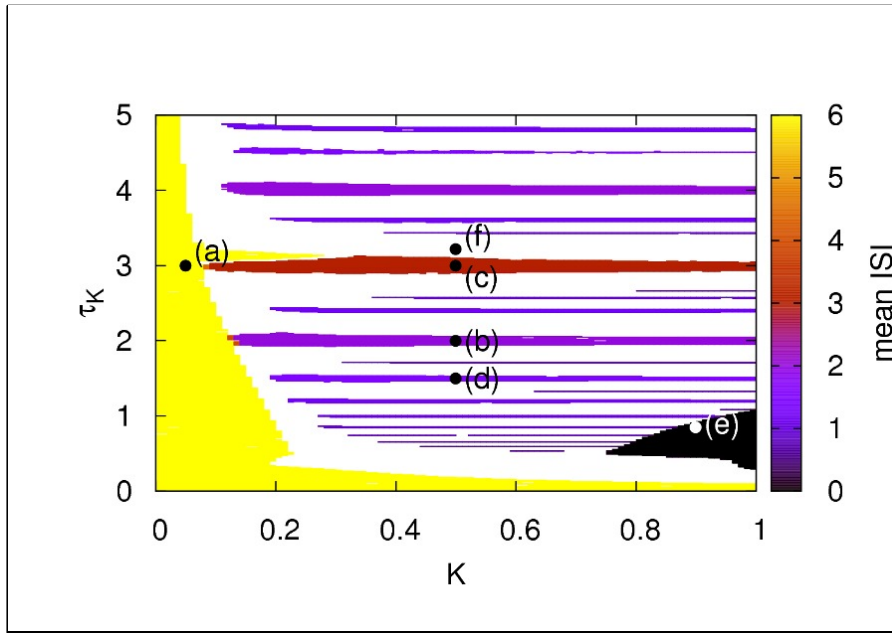


Delay-induzierte Antiphaseosz.

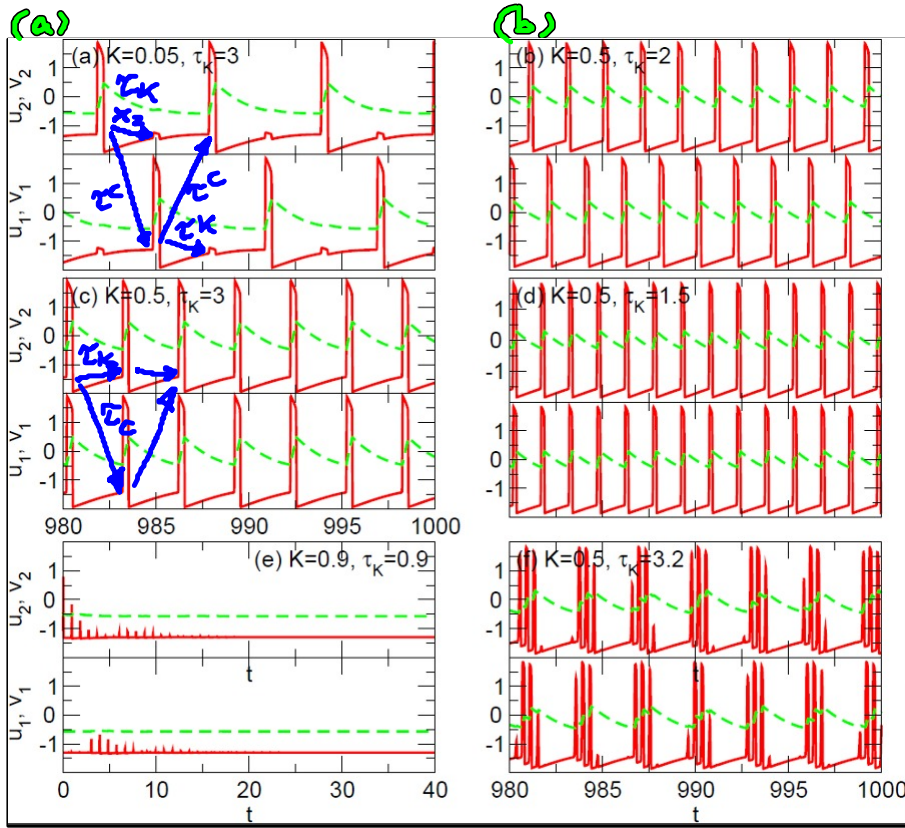
$$T = 2\tau^C$$



(ii) Mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle K , τ^K :



Kopplungspar.
 $C = 0.5$, $\tau^C = 3$



- $c = 0.5, \tau^c = 3$
- (a) Selbstkoppl.: unterschwellige Anregung nach $t = \tau^k$, volle Spike durch Koppl. nach $T = 2\tau^c$
 - (c) $K = 0.5$: Selbstkoppl. stärker \Rightarrow Spike nach $T = \tau^k = \tau^c$ gleichphasige Ose.
 - (b) Spikes mit $3T = 2\tau^c = 3\tau^k, T = 2$ Antiphase-Ose.
 - (d) $4T = 2\tau^c = 4\tau^k$ gleichphasig mit $T = 1.5$
 - (e) amplitude death (keine Ose.)

Fazit: Kopplung u. Rückkopplungsstärke führen zu reichhaltigen Szenarien, gleich-/gegenphasige Synchron., bursting, amplitude death

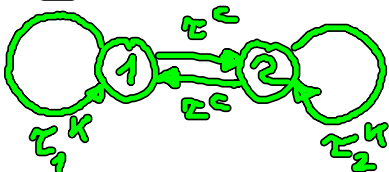
(f) bursting (bei nichttriviale Verhältnis τ^k/τ^c)

Resonanzen zwischen τ^k und τ^c :

$$\boxed{N^k \tau^k = N^c 2\tau^c} \quad N^k, N^c \in \mathbb{N} \text{ (resonanz. Synchronis.)}$$

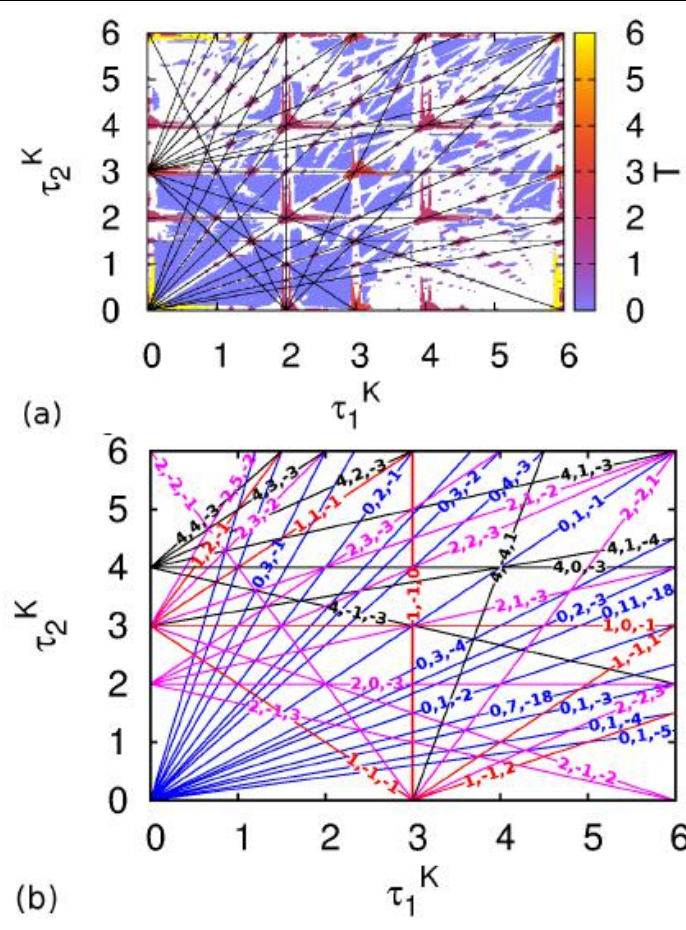
$$T_{|s|} \text{ (Periode): } T_{|s|} = \frac{2\tau^c}{N^k} = \frac{\tau^k}{N^c}$$

Verschiedene Selbstkopplungs-Verzögerungzeiten τ_1^k, τ_2^k :



$$\boxed{l\tau^c + m\tau_1^k + n\tau_2^k = 0} \quad l, m, n \in \mathbb{Z}$$

z.B. $\tau^C = 3$
 $\tau^C = 3$



Resonanzlinien
 $l, m, n \in \mathbb{Z}$

FIG. 11: (Color online) (a) Interspike intervals T in the (τ_1^K, τ_2^K) -plane for $\tau^C = 3, K = 0.5$. The black lines are added according to Eq. (31); (b) resonance lines given by Eq. (31) including the integer values of l, m , and n . Other parameters as in Fig. 2.

Panchuk, Rosin, Hövel, Schöll: *Int. J. Bif. Chaos* 23, 1330039 (2013)