Wh:

überdämpfte Brown'sche Bewegung

$$\gamma \dot{\underline{r}} = \underline{f}(t)$$

$$\underline{w}(\tau) \equiv \gamma\, \underline{r}(t+\tau) - \gamma\, \underline{r}(t) = \int_t^{t+\tau} \underline{f}(t')\,dt'$$

$$\langle \underline{f}(t) \rangle = 0 \implies \langle \underline{w}(\tau) \rangle = 0$$

$$\implies \gamma \left( \langle \underline{r}(t+\tau) \rangle - \langle \underline{r}(t) \rangle \right) = 0 \quad \circledast$$

sei $t=0$ $\quad \langle \underline{r}(t=0) \rangle = \langle \underline{r}(0) \rangle = 0$

$$\implies \gamma \langle \underline{r}(t) \rangle - \gamma \cdot 0 = 0$$

funktioniert auch mit $\langle \underline{r}(0) \rangle = \underline{R}$

$$\implies \langle \underline{r}(t) \rangle = 0$$

$$\gamma \langle \underline{r}(\tau) \rangle - \gamma \underline{R} = 0 \quad \forall \tau$$

Betrachtung des Integrals — stochastisches Integral

$$A_{ij} = \int_{t}^{t+\tau} D_{ij}\left(\{\underline{x}(t')\}, t'\right) \cdot dW_j(t')$$

mit $dW_j(t') = f_j(t')\, dt'$

Auswertung durch Diskretisieren

$$A_{ij}^{I} = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} D_{ij}\left(\{x_j(t_m)\}, t_m\right)\left(W(t_{m+1}) - W(t_m)\right)$$

$\Delta = t_{m+1} - t_m$

$$A_{ij}^{S} = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{1}{2} D_{ij}\left(\{x_j(t_{m+1})\}, t_{m+1}\right) + \frac{1}{2} D_{ij}\left(\{x_j(t_m)\}, t_m\right) \cdot \left(W(t_{m+1}) - W(t_m)\right)\right)$$

Beispiel

$$A = \int_{0}^{\tau} W(t')\, dW(t')$$

$$A^{I} = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} W(t_m)\, \underbrace{\Delta W(t_m)}_{W(t_{m+1}) - W(t_m)}$$

$\vdots$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2}\left( W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m)\right)$$

$$- \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2}\left(\Delta W(t_m)\right)^2$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{1}{2} W^2(t_{N+1}) - \frac{1}{2} W^2(t_0)\right) - \lim_{\Delta \to 0} \sum_m \frac{1}{2}(\Delta W(t_m))^2$$

$$t_{N+1} = \tau \quad , \quad t_0 = 0$$

$$A^I = \frac{1}{2} W^2(\tau) - \frac{1}{2} W^2(0)$$

$$- \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\Delta W(t_m)\right)^2$$

Betrachte den stochastische Mittel

$$\langle W^2(\tau) \rangle = \Gamma \tau$$

$$\langle W^2(0) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow A^I = \frac{1}{2} \Gamma \tau - 0 - \lim_{\Delta \to 0} \left\langle \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2}(\Delta W(t_m))^2 \right\rangle$$

Betrachte letzten Term: $\Delta W(t_m) = W(t_{m+1}) - W(t_m)$

$$\left\langle \sum_{m=0}^{N} \left(\Delta W(t_m)\right)^2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{m=0}^{N} \left( W^2(t_{m+1}) + W^2(t_m) - 2\, W(t_{m+1})\, W(t_m) \right) \right\rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \Big( \langle W^2(t_{m+1}) \rangle + \langle W^2(t_m) \rangle - 2 \langle W(t_{m+1}) W(t_m) \rangle \Big)$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \left( \Gamma t_{m+1} + \Gamma t_m - 2\Gamma t_m \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \Gamma \big( \underbrace{t_{m+1} - t_m}_{\Delta} \big) = \Gamma \sum_{m=0}^{N} \Delta = \Gamma \tau$$

$$\langle A^I \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma \tau - 0 - \Gamma \frac{1}{2} \tau$$

$$= 0$$

Mittelwert des Stochast. Integrals nach Ito!

Auswertung nach Stratonovitch

$$A^S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2}\big(W(t_{m+1}) + W(t_m)\big)\, \Delta W(t_m)$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2}\big(W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m)\big)$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{2}\big(W^2(\tau) - W^2(0)\big)$$

analog zu Ito

im Rauschmittel:

$$\langle A^S \rangle = \frac{1}{2}\Gamma \tau \neq \langle A^I \rangle$$

!!

## Bemerkung

- Die Stratonovich-Interpretation ist näher an dem, was man von gewöhnl. Riemann Integrale her kennt

$$\int_0^{\tau} u \, du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\tau}$$

- Ito-Integrale, (bei denen am unteren Rand ausgewertet wird) werden insbesondere bei Prozessen eingesetzt, bei denen es nur Information zur Vergangenheit gibt

  z.B. Finanzmärkte, Beschreibung von Aktienmärkten

- Stratonovich-Integrale sind "vertraut" im Sinne der Rechenregeln, werden typischerweise in der Physik, insbes. bei Prozessen auf Basis der Langevin-Gl. eingesetzt

## Wong-Zakai Theorem

In realen physikal. Systemen hat man immer endliche Rausch-Korrelationszeiten $\tau_R$

Solche Prozesse mit endl. Korrelationszeit $\tau_{Rauschen}$ lassen sich approximieren durch Langevin-Gleichung mit weißem Rauschen in der Stratonovich-Interpretation ($\tau_R \to 0$) !

# I.8. Kramers-Moyal-Koeffizienten

wichtig für den Zusammenhang zw. (verallgemeinerten) Langevin-Gl. (stochastische DGL) und Fokker-Planck-Gl.

$\triangleq$ partielle DGL ohne Rauschen (!) für die entsprech. Wahrscheinlichkeitsverteilung!

## Definition:

$$K^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Big\langle \big(x_{i_1}(t+\tau) - x_{i_1}(t)\big) \cdot \big(x_{i_2}(t+\tau) - x_{i_2}(t)\big) \cdots\cdots \big(x_{i_n}(t+\tau) - x_{i_n}(t)\big) \Big\rangle$$

n-ter Kramers-Moyal-Koeffizient

Auswertung bei einem "scharfen" (nicht-stochastisch) Wert der $x_i(t)$ (d.h. $\underline{x}(t)$)

Ausgangspunkt: Integrale Form der Langevin-Gl.

$$x_i(t+\tau) - x_i(t)$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt' \Big( h_i(\{\underline{x}(t')\}, t') + \sum_j D_{ij}(\{\underline{x}(t')\}, t') f_j(t') \Big] \quad (*)$$

$i = 1, \ldots, M$
$j = 1, \ldots, M$

$\big( D_{ij} f_j$ Einstein'sche Summenkonvention$\big)$

Idee: Entwickle die Funktion $h_i$ und $D_{ij}$ um den scharfen Wert $\underline{x}(t)$, der in die Def. der $K^{(n)}$ eingeht!

also

$$h_i(\{\underline{x}(t')\}, t')$$

$$= h_i(\{\underset{\text{fest}}{\underline{x}(t)}\}, t')$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial x_j}}_{h_{ij}}(\{\underline{x}(t)\}, t') \cdot (x_j(t') - x_j(t)) + \ldots$$

$$D_{ij}(\{\underline{x}(t')\}, t')$$

$$= D_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t') + \underbrace{\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}}_{D_{ijk}}(\{\underline{x}(t)\}, t')(x_k(t') - x_k(t)) + \ldots$$

Einsetzen in ⊛

$$x_i(t+\tau) - x_i(t)$$

$$= \int_t^{t+\tau} h_i(\{\underline{x}(t)\}, t')\, dt'$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt'\, h_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t') \cdot (x_j(t') - x_j(t)) + \ldots$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt'\, D_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t')\, f_j(t')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt'\, D_{ijk}(\{\underline{x}(t)\}, t')(x_k(t') - x_k(t))\, f_j(t') + \ldots$$

Wir ersetzen die Ausdrücke $x_j(t') - x_j(t)$ in den Integralen wieder durch ⊛

Dabei betrachten ~~wieder~~ nur Terme, die höchstens Doppelintegrale in der Zeit aufweisen.

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
x_i(t+\tau) - x_i(t)
&= \int_t^{t+\tau} dt'\, h_i(\{\underline{x}(t)\}, t') \\
&+ \int_t^{t+\tau} dt\, h_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t') \int_t^{t'} dt''\, h_j(\{\underline{x}(t)\}, t'') \\
&+ \int_t^{t+\tau} dt'\, D_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t')\, f_j(t') \\
&+ \int_t^{t+\tau} dt'\, D_{ijk}(\{\underline{x}(t)\}, t') \int_t^{t'} dt''\, h_k(\{\underline{x}(t)\}, t'')\, f_j(t'') \\
&+ \int_t^{t+\tau} dt'\, D_{ijk}(\{\underline{x}(t)\}, t') \int_t^{t'} dt''\, D_{kl}(\{\underline{x}(t)\}, t'')\, f_j(t')\, f_l(t'') \\
&+ \ldots
\end{aligned}
$$

Betrachte nun den ersten Kramers-Moyal-Koeffizienten $(n=1)$

$$K_i^{(1)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left\langle x_i(t+\tau) - x_i(t) \right\rangle \Big|_{\underline{x}(t)\ (\text{scharf})}$$

benutze: $\langle f_i(t) \rangle = 0$

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = \Gamma \, \delta_{ij} \, \delta(t-t')$$

beachte:

$$\left\langle \int_t^{t+\tau} dt' \, \overbrace{D_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t')}^{\text{deterministisch!!}} f_j(t') \right\rangle$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt' \, D_{ij} \, \langle f_j(t') \rangle = 0$$

da $D_{ij}$ bei einem ~~...~~ nicht-stochast. Vektor ausgewertet wird

Es ergibt sich:

$$\langle x_i(t+\tau) - x_i(t) \rangle$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt'\, h_i(\{\underline{x}(t)\}, t')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt''\, h_{ij}(\{\underline{x}(t)\}, t')\, h_j(\{\underline{x}(t)\}, t'')$$

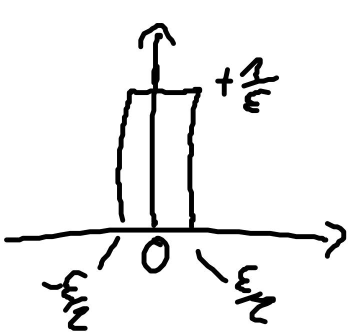
$$+ \int_t^{t+\tau} dt'\, \underbrace{D_{ijk}(\{\underline{x}(t)\}, t')}_{\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}} \int_t^{t'} dt''\, D_{kl}(\{x(t)\}, t'')\, \underbrace{\langle f_j(t')\, f_l(t'')\rangle}_{\Gamma\, \delta_{jl}\, \delta(t'-t'')}$$

man hat also Terme der Form

$$\int_t^{t'} dt''\, a(t'')\, \delta(t'-t'') \quad ??$$

Auswertung à la Stratonovich

Ansatz: $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(t,\varepsilon)$




$$\text{mit } f(t,\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & t \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

symmetrisch um den Ursprung

$$\Rightarrow \int_{t}^{t'} dt'' \, a(t'') \, \delta(t'-t'')$$

$\varepsilon$ endlich

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t'-\frac{\varepsilon}{2}}^{t'} dt'' \, a(t'')$$

Funktion wird an der oberen Integralgrenze

$$\xrightarrow[\varepsilon \text{ klein}]{} \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \frac{\cancel{\varepsilon}}{2} a(t') = \frac{1}{2} a(t')$$

Die Deltafunktion trägt nur halb zum Integral bei!

(Beachte: In der Ito-Interpretation käme hier Null heraus!)

$$\langle x_i(t+\tau) - x_i(t) \rangle$$

$$= \int^{t+\tau} dt' \, h_i(\{\underline{x}(t)\}, t')$$

$$+\int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt'' \, h_{(i)}(\{\underline{x}(t)\}, t') \, h_j(\{\underline{x}(t)\}, t'')$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma \int_t^{t+\tau} dt' \, D_{ijk}(\{\underline{x}(t)\}, t') \, D_{kj}(\{\underline{x}(t)\}, t'')$$

Erinnern: $K_i^{(1)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle x_i(t+\tau) - x_i(t) \rangle$

Betrachte also kleine $\tau$

$$\int_t^{t+\tau} dt' \, h_i(\{\underline{x}(t)\}, t') \simeq \tau \, h_i(\{\underline{x}(t)\}, t)$$

$$\int_t^{t+\tau} dt' \, D_{ijk}(\ldots) D_{kj}(\ldots) = \tau \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{\underline{x}(t)\}, t) \cdot D_{kj}(\{x(t)\}, t)$$

Der ~~und~~ verbleibende Term enthält 2 (unproblematische) Zeitintegrale, ist also $\sim \tau^2$ $\Rightarrow$ verschwindet im Limes!

$$\boxed{\begin{aligned} K_i^{(1)}&(\{\underline{x}(t)\},t) \\ &= h_i(\{\underline{x}(t)\},t) \\ &\quad + \frac{\Gamma}{2}\,\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{\underline{x}(t)\},t)\, D_{kj}(\{\underline{x}(t)\},t) \end{aligned}}$$

Erster Kramers-Moyal-Koeffizient ("Drift-Koeffizient") in der Stratonovich-Interpretation