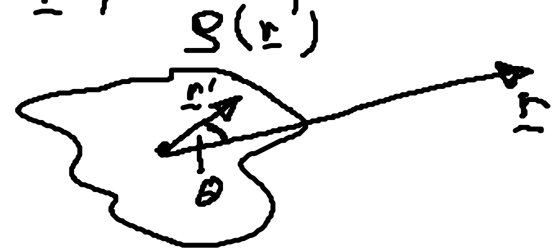
Elektrische Multipol-Entwicklung

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \, r^{-l-1}$$

mit $Q_l = \int d^3r' \, r'^l \rho(\underline{r}') \, P_l(\cos\theta)$ „$\underline{2^l\text{-Pol}}$"

Legendre-Polynome

Für stark lokalisierte Ladungsverteilungen ($r' \ll r$) konvergiert die Reihe schnell:

$\underline{l=0}$: $\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$

$Q_0 = \int d^3r' \rho(\underline{r}')$ <u>Monopol</u>

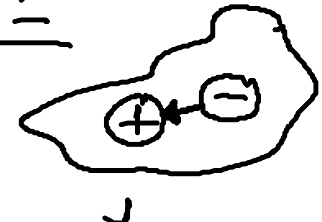
(Gesamtladung)

fällt am langsamsten ab

$\Rightarrow$ Ladungsverteilung wirkt in großer Entfernung wie Punktladung

$\underline{l=1}$: $\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$

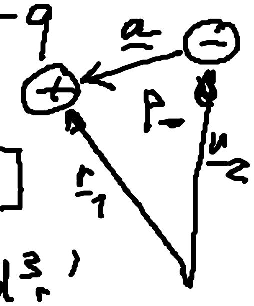
$$Q_1 = \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underbrace{r'\cos\theta}_{\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}} = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r}$$



$\underline{p} := \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underline{r}'$ el. <u>Dipolmoment</u>

fällt $\sim \frac{1}{r^2}$ ab, wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper ($Q_0 = 0$)

Beispiel: 2 Punktladungen $q, -q$ bei $\underline{r}_1, \underline{r}_2$



$$\rho(\underline{r}') = q\left[\delta(\underline{r}'-\underline{r}_1) - \delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\right]$$

$$Q_0 = \int \rho(\underline{r}')\, d^3r' = q\int \delta(\underline{r}'-\underline{r}_1)\, d^3r' - q\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\, d^3r'$$

$$= q - q = 0$$

$$\underline{p} = \int \rho(\underline{r}')\,\underline{r}'\, d^3r' = q\int \underline{r}'\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_1)\, d^3r' - q\int \underline{r}'\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\, d^3r'$$

$$= q\underline{r}_1 - q\underline{r}_2 = q(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = q\underline{a}$$

Feld des Dipolpotential:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\partial_i \frac{p_k x_k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3 x_i p_k x_k}{r^5} - \delta_{ik}\frac{p_k}{r^3}\right)$$

(Summationskonvention! $\sum_k$)

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right]$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für } r \to \infty$$

$\underline{l=2}$: $$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r^3}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')(r')^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\Big(3\,\underbrace{\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}\,\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}}_{\frac{x_k' x_k\, x_l' x_l}{r^2}} - (r')^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2r^2}\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\left(3\,x_k' x_l' - r'^2\delta_{kl}\right)}_{Q_{kl}}\, x_k x_l$$

Q_{kl} <u>Quadrupolmoment</u>

(spurfreier, symm. Tensor
$\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = \int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\left(3r'^2 - 3r'^2\right) = 0$)

$\Downarrow$

ex. orthogonale Koord. trafo auf Diagonalform:

$Q_{kl} = 0$ für $k \neq l$

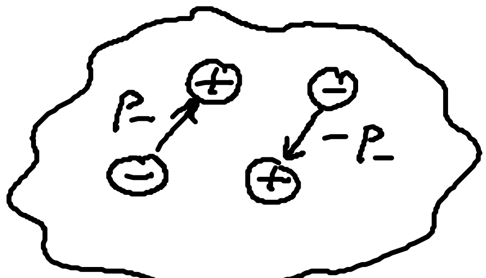
$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$

$\Rightarrow$ nur 2 unabh. Komp.

$$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2r^5}\,Q_{kl}\,x_k x_l =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\underline{r}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{2r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

<u>Beispiel</u>



2 entgegengerichtete Dipole

1.5 <u>Elektrostat. Feldenergie</u>

Kraft $\underline{F}(\underline{r}) = q\,\underline{E}(\underline{r}) = -q\,\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

$\Rightarrow V(\underline{r}) = q\,\phi(\underline{r})$ pot. Energie einer Ladung q im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

$$W_{ij} = q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji}$$ pot. Energie der Ladung q_i bei $\underline{r}_i$ im Pot. der Ladung q_j bei $\underline{r}_j$

Gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen $q_1, \ldots$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

Kontin. Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3r\, \phi(\underline{r})\, \rho(\underline{r})}$$

Mit $\rho(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}$ folgt

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \phi(\underline{r})\, \underline{\nabla} \cdot \underline{E}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int d^3r\, \underline{\nabla}(\phi \underline{E}) - \int d^3r \left(\underline{\nabla}\phi\right) \underline{E}(\underline{r}) \right]$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \Big[\underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f}\,(\underset{\sim r^{-1}}{\phi}\,\underset{\sim r^{-2}}{\underline{E}})}_{0} + \int d^3r \left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2 \Big]$$

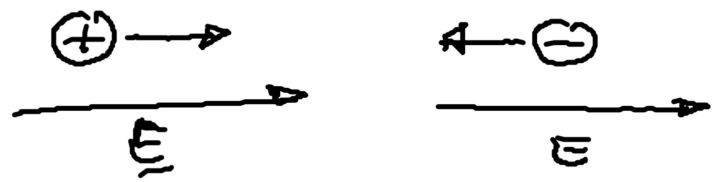
$$= \int d^3r \; w(\underline{r})$$

mit $\boxed{w(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2 = \text{Energiedichte des el. Feldes}}$

1.6 Leiter in der Elektrostatik

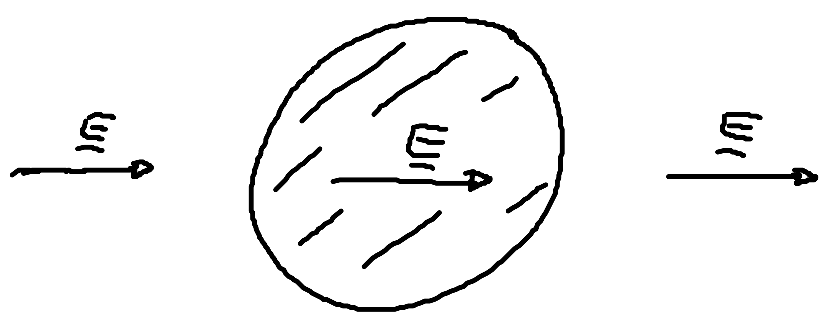
Elektrischer Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen el. Ladungen.

El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Innern eines Leiters übt Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$ auf bewegl. Lad. aus:

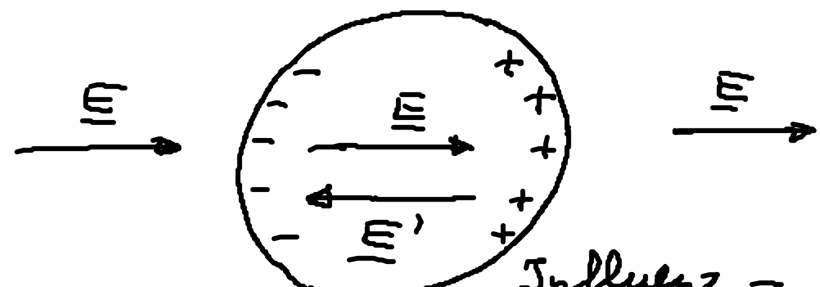


$\Rightarrow$ kompensierendes Gegenfeld $\underline{E}'$ wird aufgebaut $\underline{F} = 0$, d.h. $\underline{E}' - \underline{E} = 0$

Anfang:



End:



Influenz-ladungen

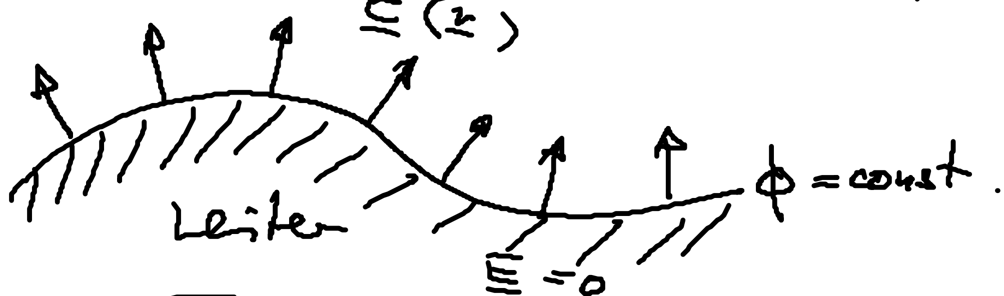
$\underline{E}^{res}(\underline{r}) = 0$ im Innern des Leiters

$$\underline{E}^{res}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\underline{r}) = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Leiteroberfläche ist <u>Äquipotentialfläche</u> (im Innern)

Allg. $\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = \text{const}$

$\Longrightarrow \underline{E}(\underline{r}) \perp$ Leiteroberflächen

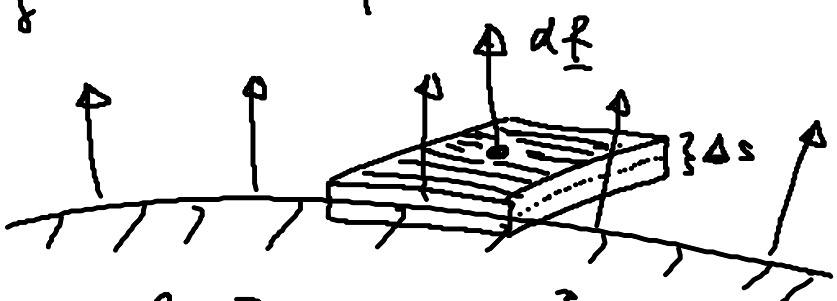


Allg. $\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho(\underline{r})$

hier: $\underline{E}(\underline{r}) = 0 \Rightarrow \rho(\underline{r}) = 0$

keine el. Ladungen im Innern von Leitern

<u>Flächenladungsdichte auf Leitoberflächen:</u>



$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r})$$

$V = df \cdot \Delta s$ mit $df \to 0$, $\Delta s \to 0$

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow df \underbrace{\underline{n}\,\underline{E}}_{E}$$

$$\int_V d^3r\, \rho(r) \longrightarrow df \underbrace{\rho(\underline{r})\,\Delta s}_{\sigma(\underline{r})}$$

$\sigma(\underline{r})$ <u>Flächenladungsdichte</u>