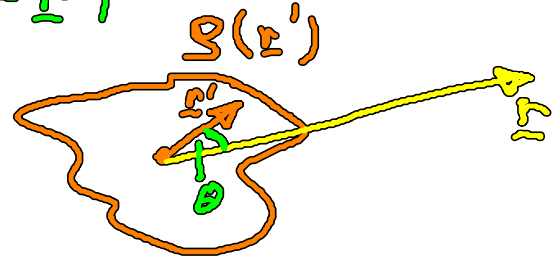


# Elektrische Multipol-Entwicklung

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(r')}{|r-r'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l r^{-l-1}$$



mit  $Q_l = \int d^3r' r'^l \rho(r') P_l(\cos\theta)$  „ $2^l$ -Pol“  
 Legendre-Polynome

Für stark lokalisierte Ladungsverteilungen ( $r' \ll r$ ) konvergiert die Reihe schnell:

$l=0$  :  $\phi^{(0)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$

$Q_0 = \int d^3r' \rho(r')$  Monopol  
 (Gesamtladung)

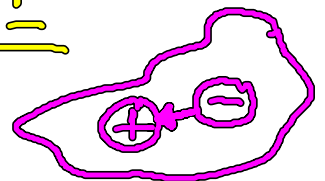


fällt am langsamsten ab

⇒ Ladungsverteilung wirkt in großer Entfernung wie Punktladung

$l=1$  :  $\phi^{(1)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot r}{r^3}$

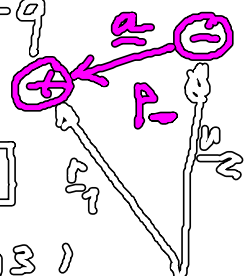
$Q_1 = \int d^3r' \rho(r') \underbrace{r' \cos\theta}_{\frac{r' \cdot r}{r}} = \frac{P \cdot r}{r}$



$P := \int d^3r' \rho(r') r'$  el. Dipolmoment

fällt  $\sim \frac{1}{r^2}$  ab, wichtiger Term  
für insgesamt neutrale Körper  
( $Q_0 = 0$ )

Beispiel: 2 Punktladungen  $q, -q$   
bei  $r_1, r_2$



$$\rho(r') = q [\delta(r' - r_1) - \delta(r' - r_2)]$$

$$Q_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(r') d^3r' = q \int_{\mathbb{R}^3} \delta(r' - r_1) d^3r' - q \int_{\mathbb{R}^3} \delta(r' - r_2) d^3r'$$

$$= q - q = 0$$

$$\underline{p} = \int \rho(r') \underline{r}' d^3r' = q \int \underline{r}' \delta(r' - r_1) d^3r' - q \int \underline{r}' \delta(r' - r_2) d^3r'$$

$$= q \underline{r}_1 - q \underline{r}_2 = q (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = q \underline{p}$$

Feld des Dipolpotential:

$$E_i = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{\rho_k^x x_k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3 x_i \rho_k^x x_k}{r^5} - \delta_{ik} \frac{\rho_k^x}{r^3} \right)$$

(Summationskonventionen!)

$\sum_k$

$$\Rightarrow \underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\underline{p} \cdot \underline{r}) \underline{r} - r^2 \underline{p}]$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

$$\underline{L=2}: \phi^{(2)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^3}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') (r')^2 (3\cos^2\theta - 1) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') \left( 3 \frac{r'_x r'_x}{r} \frac{r'_y r'_y}{r} - (r')^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2r^2} \int d^3r' \rho(r') (3 x'_k x'_l - r'^2 \delta_{kl}) x_k x_l
 \end{aligned}$$

$Q_{kl}$  Quadrupolmoment

(spurfrei, symm. Tensor)

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \int d^3r' \rho(r') (3r'^2 - 3r'^2) = 0$$

↓

ex. orthogonale Koord. trafo  
auf Diagonalform:

$$Q_{kl} = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

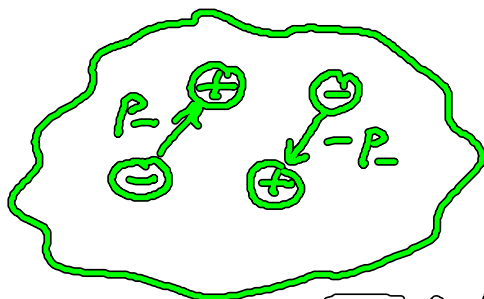
$$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$$

⇒ nur 2 unabh. Komp.

$$\phi^{(2)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} Q_{kl} x_k x_l =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cdot Q \cdot r}{2r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

Beispiel



2 entgegengesetzte  
Dipole

1.5 Elektrostat. Feldenergie

$$\text{Kraft } \underline{E}(\underline{r}) = q \underline{E}(\underline{r}) = -q \nabla \phi(\underline{r})$$

$\Rightarrow V(\underline{r}) = q\phi(\underline{r})$  pot. Energie einer Ladung  $q$  im Feld  $\underline{E}(\underline{r})$

$$W_{ij} = q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji} \quad \text{pot. Energie der Ladung } q_i \text{ bei } \underline{r}_i \text{ im Pot. der Ladung } q_j \text{ bei } \underline{r}_j$$

Gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen  $q_1, \dots$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

Kontin. Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$ :

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \phi(\underline{r}) \rho(\underline{r})$$

Mit  $\rho(\underline{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E}$  folgt

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \phi(\underline{r}) \nabla \cdot \underline{E}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int d^3r \nabla \cdot (\phi \underline{E}) - \int d^3r (\nabla \phi) \cdot \underline{E}(\underline{r}) \right]$$

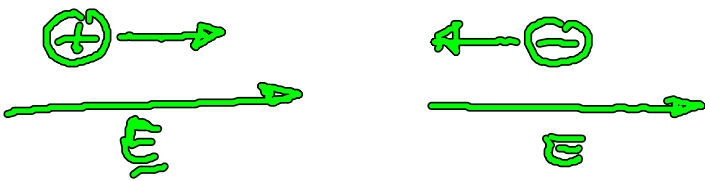
$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f}(\phi \underline{E})}_{\sim \frac{1}{r-1}} + \int d^3r (\underline{E}(\underline{r}))^2 \right]$$

$$= \int d^3r w(r)$$

mit  $w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(r))^2 = \text{Energiedichte des el. Feldes}$

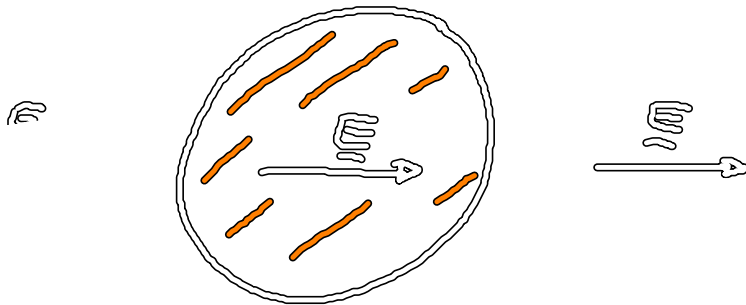
## 1.6 Leiter in der Elektrostatik

Elektrischer Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen el. Ladungen.  
 El. Feld  $\underline{E}(r)$  im Inneren eines Leiters übt Kraft  $\underline{F} = q\underline{E}$  auf bewegl. Lad. aus:

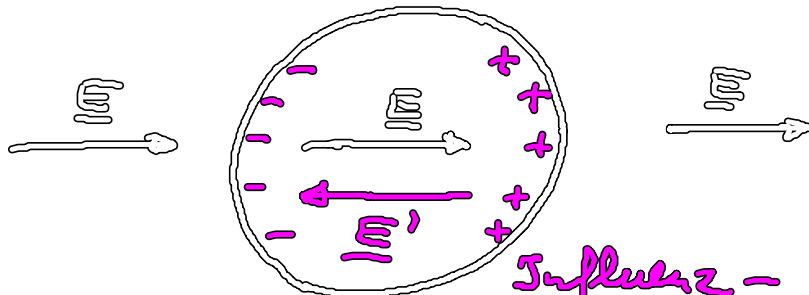


→ kompensierendes Gegenfeld  $\underline{E}'$  wird aufgebaut  $\underline{E} = 0$ , d.h.  $\underline{E}' - \underline{E} = 0$

Anfang:



End:



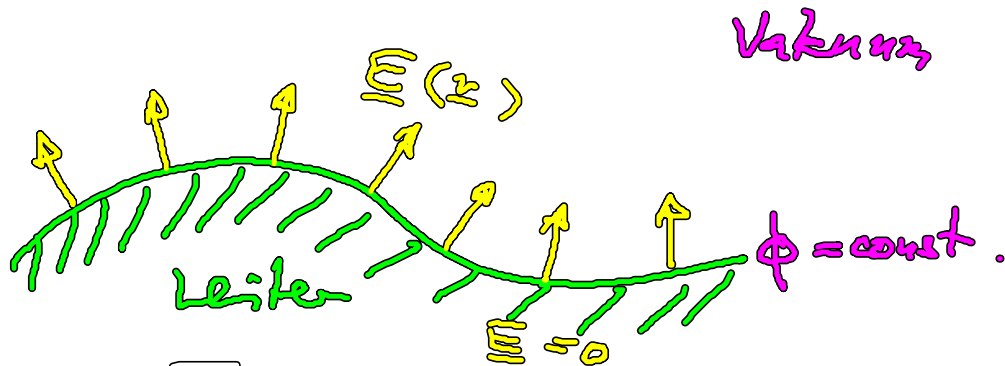
$\underline{E}^{res}(r) = 0$  in Innerem des Leiters Influenz-ladungen

$$\underline{E}^{res}(r) = -\underline{\nabla}\phi(r) = 0 \Rightarrow \phi(r) = \text{const.}$$

⇒ Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche <sup>im Inneren</sup>

Allg.  $\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = \text{const}$

⇒  $\underline{E}(\underline{r}) \perp$  Leiteroberflächen

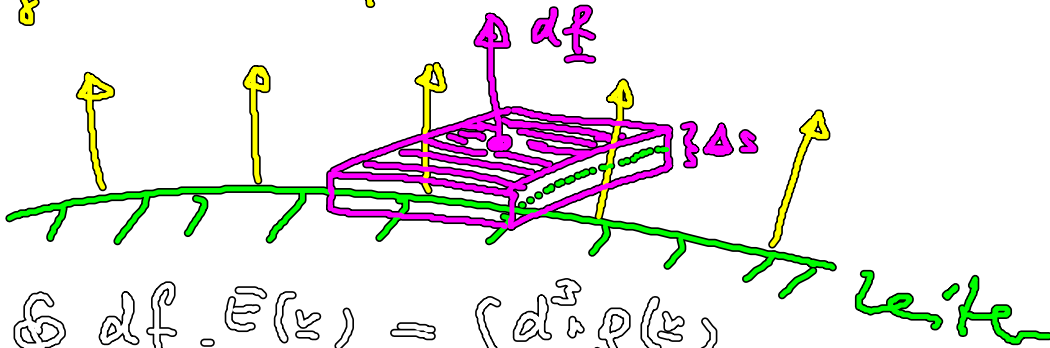


Allg.  $\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho(\underline{r})$

hier:  $\underline{E}(\underline{r}) = 0 \Rightarrow \rho(\underline{r}) = 0$

keine el. Ladungen im Inneren von Leitern

Flächenladungsdichte  
auf Leiteroberflächen:



$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r \rho(\underline{r})$$

$V = \sigma \cdot \Delta s$  mit  $df \rightarrow 0, \Delta s \rightarrow 0$

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \rightarrow df \underline{n} \cdot \underline{E}$$

$$\int_V d^3r \rho(\underline{r}) \rightarrow df \underbrace{\rho(\underline{r}) \Delta s}_{\sigma(\underline{r})}$$

$\sigma(\underline{r})$  Flächenladungsdichte