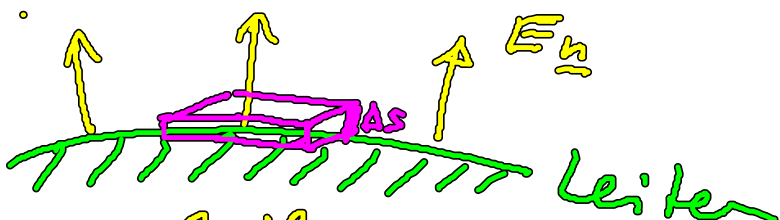
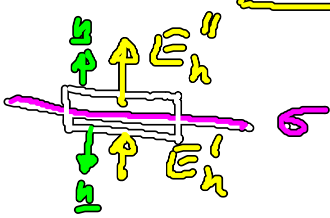
Flächenladungsdichte $\sigma(\underline{r}) = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$




(*) $\varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r})$

$$\varepsilon_0\, \underline{n} \cdot \underline{E}\, \cancel{df} = \underbrace{\rho(\underline{r})\, \Delta s}_{\sigma(\underline{r})}\, \cancel{df}$$

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})\,\underline{n}}$$ auf Leiteroberfläche



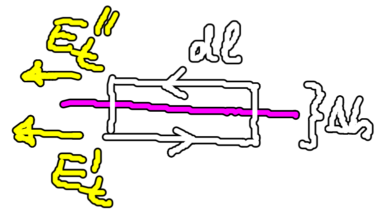

$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{\text{„Flächendivergenz“}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})$$

„Flächendivergenz“ = Sprung der Norm. komp. von $\underline{E}$

Volumendivergenz $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$

Tangentialkomp. von $\underline{E}$ ist stetig beim Durchgang durch geladene Fläche

Beweis $\oint_{\partial F} \underline{E}\, d\underline{s} = \int_F \underline{\nabla} \times \underline{E}\, d\underline{f} = 0$




$F = dl \cdot \Delta h$, mit $dl \to 0$, $\Delta h \to 0$:

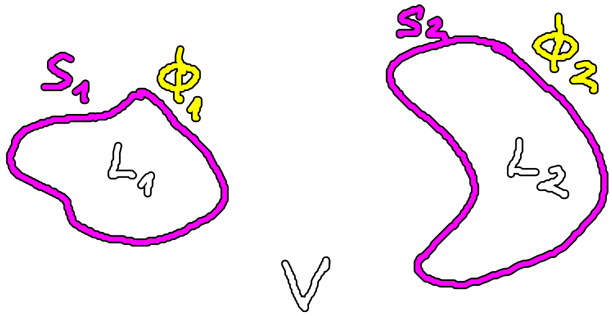
$$\left(E_t'' - E_t'\right) dl = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_t'' - E_t' &= 0 \\ E_n'' - E_n' &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r}) \end{aligned}}$$

# Randwertaufgaben der El.statik mit Leitern

## 1. Grundaufgabe:

geg.: Leiter $L_\alpha$ (Oberflächen $S_\alpha$), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Pot. $\Phi_\alpha$;
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum $V$




gesucht: $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$
zu den Randbed. $\phi(\underline{r})\big|_{S_\alpha} = \Phi_\alpha$

$$\phi(\underline{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

sowie Gesamtladungen $Q_\alpha$ auf den Leitern

(Dirichlet'sches Randwertproblem)

Lösung

$$(*) \quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \underbrace{\int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')}_{\text{Lös. der inhom. Poissongl. zu homog. Randbed.}} + \underbrace{\epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{\text{Lös. der hom. Poissongl. } \Delta\phi = 0 \text{ zu inhom. Randbed.}}}$$

wobei: die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}')\big| = 0 \qquad G(\underline{r}-\underline{r}') \longrightarrow 0$$

$\left| \begin{array}{l} \underline{r} \in S_\alpha \\ \underline{r}' \in V \end{array} \right.$ $\qquad r \to \infty$

**Beweis**

Aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{v} = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \psi\,\underline{\nabla}\varphi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\psi\,\underline{\nabla}\varphi = \int_V d^3r\,(\psi\Delta\varphi + \underline{\nabla}\psi\cdot\underline{\nabla}\varphi)$$

bzw. $\underline{v} = \varphi\,\underline{\nabla}\psi$

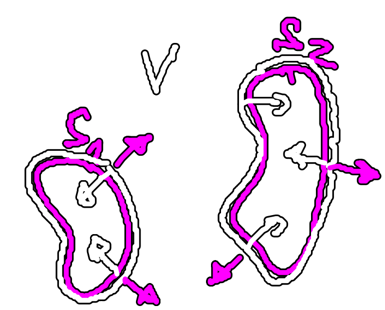
$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\varphi\,\underline{\nabla}\psi = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi)$$

$\Rightarrow$ Green'sche Satz:

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi\,\underline{\nabla}\psi - \psi\,\underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$$

Setze $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r}-\underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) := \Phi(\underline{r})$, $\quad \partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$




(i) Löse Poissongl. ohne Randbed.

$\Delta\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad \Phi(\underline{r}) = (*)$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\Phi(\underline{r})\,\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\,G(\underline{r}-\underline{r}')\,\underline{\nabla}\Phi}_{0 \text{ wegen } G|_{\in S_\alpha} = 0}$$

$d\underline{f} \to -d\underline{f}$

$\bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0}\Big[\underbrace{\int_V d^3r\,\Phi(\underline{r})\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{\Phi(\underline{r}')} - \int d^3r\,G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r})\Big]$$

n

$$\longrightarrow \phi(\underline{r}') = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r})} + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1} \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_{\underline{r}} G(\underline{r}-\underline{r}')$$

(ii) Randbed. auf $S_\alpha$ erfüllt:

$$\phi(\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_{\underline{r}} G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \phi(\underline{r})\nabla_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

greensher Satz

$$= -\epsilon_0 \Big[ \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \nabla_r\phi$$

$$+ \underbrace{\int_V d^3r \big(\phi \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\phi(\underline{r}')\big|_{\underline{r}'\in S_\beta}} - \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \Delta\phi \big) \Big]$$

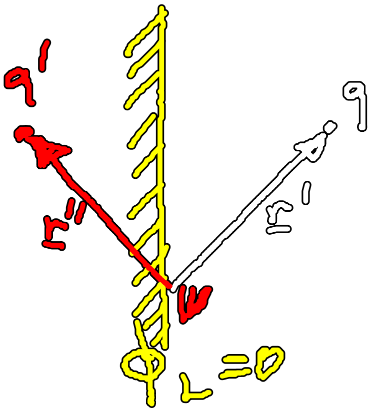
$$= \phi_\beta \qquad \square$$

Ladung: $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\, \sigma = \epsilon_0 \oint \underbrace{df\, \underline{n}}_{d\underline{f}}\cdot\underline{E}$

$$= -\epsilon_0 \oint d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\phi$$

# Konstruktion der Green'schen Funktion

Für Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:
Methode der Bildladungen (Spiegelladungen)

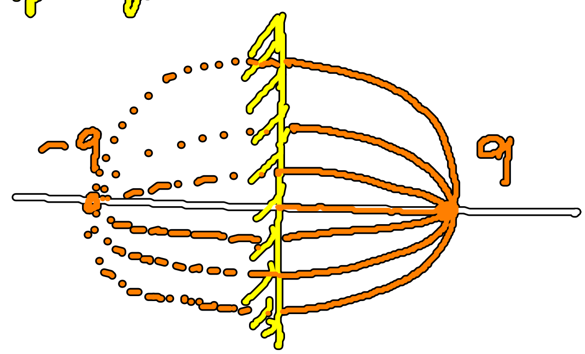



Wähle fiktive Bildladung $q'$ bei $\underline{r}''$ im Leiter, so dass Potential beider Ladungen auf der Leiteroberfläche verschwindet

$q' = -q$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$

Dipolpot.




fiktive reale Feldlinien