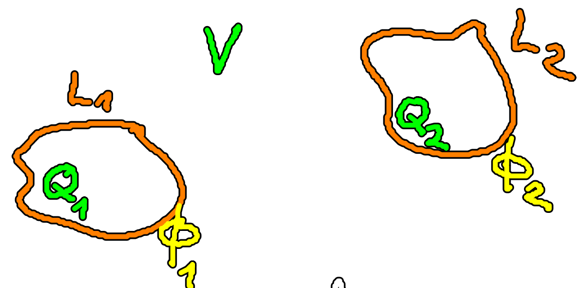
2. Grundaufgabe:

geg.: Leiter L_α (Oberfläche S_α), $\alpha=1,\dots,n$
mit Ladungen Q_α;
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum V

gesucht: $\Phi(\underline{r})$; Φ_α



Lösung: Zurückführen auf die 1. Grundaufgabe durch Zusammenhang zw.

Es gilt:

$$\boxed{Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\Phi_\beta} \qquad \alpha=1,\dots,n$$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis:

$$Q_\alpha = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\Phi(\underline{r})$$

$$= -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')$$

$$-\epsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \sum_\beta \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\underline{\nabla}_{r'}\, G(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\epsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,=\,0 \text{ für } \underline{r}\in L_\alpha,\ \underline{r}'\in V} \rho(\underline{r}')$$

$$-\sum_{\beta=1}^{n} \phi_\beta\, \epsilon_0^2 \underbrace{\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\underline{\nabla}_{r'}\, G(\underline{r}-\underline{r}')}_{=:\,-C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta \qquad \square$$

Symmetrie $G(\underline{r}-\underline{r}') = G(\underline{r}'-\underline{r})$

$\Rightarrow \quad \boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}$

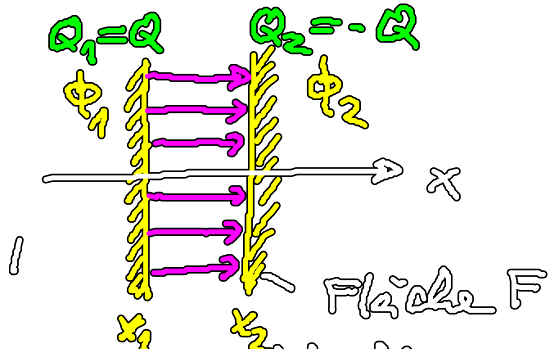
Einheit der Kapazität: $1\ \mathrm{F} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 1$ Farad

(M. Faraday 1791–1867)

... speziell 1 Leiter mit Pot. ϕ_L:

$$C = \frac{Q}{\phi_L}$$ <u>Kapazität des Leiters</u>

<u>Beispiel</u>: Plattenkondensator



$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 \\ Q_2 &= C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 \end{aligned}\right\} C_{12} = C_{21} \equiv C'$$

Symm. $1 \Leftrightarrow 2 \quad \Rightarrow C_{11} = C_{22} \equiv C$

Spezialfall: $Q_1 + Q_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q &= C\phi_1 + C'\phi_2 \\ -Q &= C'\phi_1 + C\phi_2 \end{aligned}$$

$$0 = (C + C')(\phi_1 + \phi_2) \quad \Rightarrow C = -C'$$

$$C = -C' = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \qquad (1)$$

E-Feld fast nur zwischen den Platten

$$\Rightarrow \sigma = \frac{Q}{F} = \epsilon_0 E = \text{const.} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = -Ex + \phi_0$$

$$\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = E(x_2 - x_1) = Ea \qquad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \boxed{C = -C' \overset{(3)}{=} \frac{Q}{Ea} = \epsilon_0 \frac{F}{a}}$$

Lösung der 2. Grundaufgabe:

Inverse der Kapazitätsmatrix

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} (C^{-1})_{\alpha\beta} Q_\beta$$

eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe

$\Rightarrow \phi(\underline{r})$ für geg. Q_β, $\rho(\underline{r})$. □

Energie des Feldes im Außenraum ($\rho(\underline{r})=0$)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V d^3r\,\left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2$$

diff. Änderung $\quad Q_\alpha \longrightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$

$\quad\Phi_\alpha \longrightarrow \Phi_\alpha + \delta\Phi_\alpha$

Lösung $\quad \Phi \longrightarrow \Phi(\underline{r}) + \delta\Phi(\underline{r})$

$$\delta W = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\; 2\,\underbrace{\underline{E}(\underline{r})}_{}\,\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= -\epsilon_0\int_V d^3r\;\underbrace{\left(\underline{\nabla}\Phi(\underline{r})\right)\delta\underline{E}(\underline{r})}_{\underline{\nabla}(\Phi\,\delta\underline{E}) - \Phi\,\underbrace{\underline{\nabla}\delta\underline{E}}_{0}}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\delta\underline{E} = \delta\,\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E}}_{0} = 0 \quad \text{in } V$$

$$\delta W = -\epsilon_0\int_V d^3r\;\underline{\nabla}(\Phi\,\delta\underline{E})$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \epsilon_0\sum_\alpha\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\left(\Phi(\underline{r})\,\delta\underline{E}(\underline{r})\right)$$

$$\overset{\Phi(\underline{r})|_{S_\alpha}=\Phi_\alpha}{=} \epsilon_0\sum_\alpha\Phi_\alpha\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\delta\underline{E}$$

$$= \sum_\alpha\Phi_\alpha\,\delta Q_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}\Phi_\alpha\,C_{\alpha\beta}\,\delta\Phi_\beta$$

$$\underline{\delta Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\,\delta\Phi_\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\delta\phi_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\beta\alpha}}_{C_{\alpha\beta}}\,\phi_\beta\,\delta\phi_\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\underbrace{\left(\phi_\alpha\,\delta\phi_\beta + \phi_\beta\,\delta\phi_\alpha\right)}_{\delta(\phi_\alpha\phi_\beta)}$$

$$\delta W = \delta\left\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\phi_\beta\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\phi_\beta} \qquad \text{Feldenergie}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1. Kontinuitätsgleichung

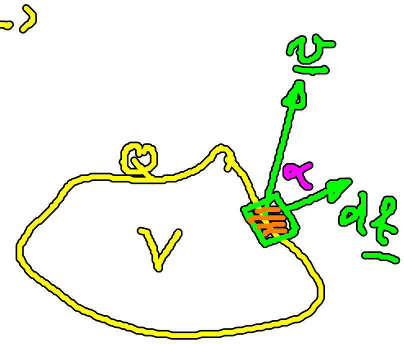
Bewegte Ladungen $\longrightarrow$ el. Strom I

Exp. Erfahrung: Ladungserhaltung

$$Q(t) = \int_V d^3r\,\rho(\underline{r},t)$$

$\Rightarrow$ globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V}\delta I$$



$$\delta I = \rho\frac{dV}{dt} = \rho\,\frac{|\underline{v}|dt\,|d\underline{f}|\cos\alpha}{dt} = \rho\,\underline{v}\cdot d\underline{f}$$

El. Stromdichte $\underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{j} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\underline{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0}$$ Kontin.-gl. (lokaler Erhalt.satz)

stat. Lad.verteil. $\Rightarrow \mathrm{div}\,\underline{j} = 0$

2.2. Magn. Induktion

Exp. Erfahrung

Kraft $\boxed{\underline{F} = q\,\underline{v}\times\underline{B}(\underline{r})}$ Lorentz-Kraft

El.statik: $\underline{F} = q\,\underline{E}(\underline{r})$

$\underline{B}(\underline{r})$ = magn. Induktion am Ort $\underline{r}$, erzeugt durch andere bewegte Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$

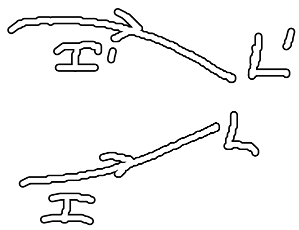
$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Ampère-Gesetz

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Einheit (SI): $[B] = 1\,\frac{Ns}{Cm} = 1\,T = 1$ Tesla

$$\Rightarrow \mu_0 = 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$$



$$\boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$ Kraft von L' auf L

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{LL'} (d\underline{r}\cdot d\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Biot-Savart-Gesetz

parallele Ströme ($I d\underline{r}\, I' d\underline{r}' > 0$) : Anziehung

antiparalle Ströme ($I d\underline{r}\, I' d\underline{r}' < 0$) : Abstoßung