4.2 Retardierte Potenziale

<u>Aufgabe</u>: Lösung der inhomog. Wellengln.

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0\underline{j} \end{aligned}}$$

(Lorentz-Eichung)

zu vorgegebenen erzeugenden Quellen
$\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$ und Randbed. $\phi, \underline{A} \xrightarrow{r\to\infty} 0$

<u>Methode</u>: Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

<u>vgl. Elektrostatik</u>

$$\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$$

$$\boxed{\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)}$$

Fourier-Trafo $\Big\Downarrow$ $\hat{\Box}^{-1} = -\hat{G}$

$u := \begin{cases} \phi \\ \underline{A} \end{cases}$

$f := \begin{cases} \rho/\epsilon_0 \\ \mu_0 \underline{j} \end{cases}$

$$\boxed{\hat{u}(\underline{k},\omega) = \hat{G}\cdot\hat{f}(\underline{k},\omega)}$$

Rück-Trafo $\Big\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} u(\underline{r},t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}',t') \\ \Box\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t') \end{aligned}}$$

$\Big\Downarrow$

$$\hat{\phi}(\underline{k}) = \hat{G}\hat{\rho}\,, \quad \hat{G} = \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

$\Big\Downarrow$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')$$

mit

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}'-\underline{r}|}$$

$$\Delta G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

<u>Kausalitätsbed.</u>: $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \overset{!}{=} 0$ für $t'>t$ (Zukunft) t = heute

damit $u(\underline{r},t)$ nur von $f(\underline{r}',t')$ mit $t'<t$ beeinflusst wird.

Fourier-Trafo:

$$f(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\hat{f}(\underline{q},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Ebenso

$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{u}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \Box u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \underline{\hat{u}(\underline{q},\omega)}\, \underbrace{\Box\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}}_{-\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{f}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \hat{u}(\underline{q},\omega) = \hat{f}(\underline{q},\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{u}(\underline{q},\omega) = \frac{\hat{f}(\underline{q},\omega)}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \qquad \hat{G} = \frac{1}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Rücktrafo:

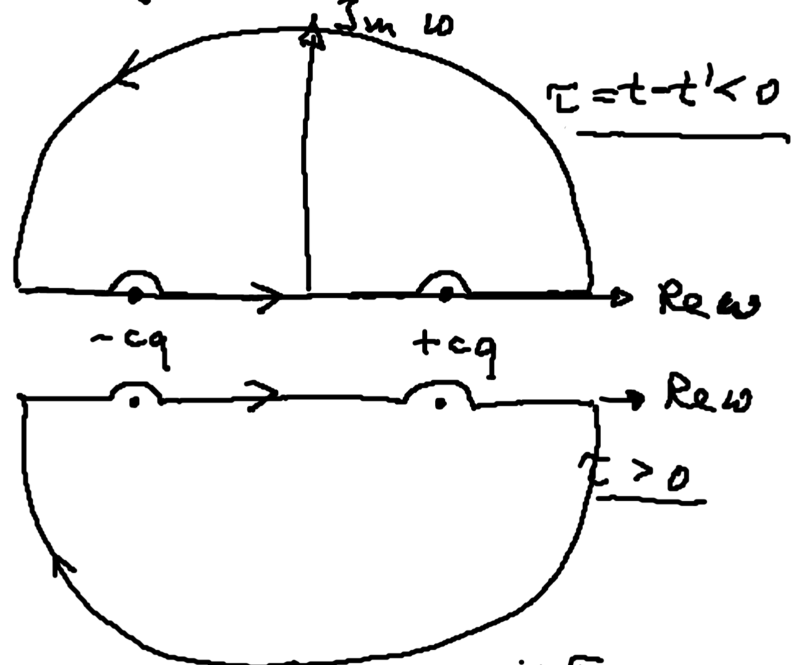
$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \underline{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'} \; \underline{f(\underline{r}',t')\, e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r}' - \omega t')}}$$

$$= \underline{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'} \; \underbrace{\left\{ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{i\underline{q}(\underline{r}-\underline{r}') - i\omega(t-t')}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\}}_{G(\underline{r}-\underline{r}',\, t-t')} \; \underline{f(\underline{r}',t')}$$

<u>Berechnung der Green'schen Fkt. durch komplexe Integr.</u>

Integrand hat Pole bei $\omega = \pm c q$

Green'sche Fkt. wird eindeutig durch Festlegung des Integrationswegs um die Pole herum:



Integral über Halbkreis:

$\omega = R e^{i\varphi}$, $\quad \underline{0 \le \varphi \le \pi}$

$d\omega = R e^{i\varphi}\, i\, d\varphi$

$$\left| e^{-i\omega\tau} \right| = e^{\underbrace{R(\sin\varphi)}_{>0}\underbrace{\tau}_{<0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$\underline{\pi \le \varphi \le 2\pi}$

$$\left| e^{-i\omega\tau} \right| = e^{\underbrace{R(\sin\varphi)}_{<0}\underbrace{\tau}_{>0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\Gamma(\underline{q},\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \oint_C d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 2\pi i \sum_{\text{Pole}} \text{Res}$$

(<u>Residuensatz</u>)

<u>$\tau < 0$</u> : keine Pole im Innern von C

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{q},\tau) = 0 \Rightarrow \boxed{G(\underbrace{\underline{r}-\underline{r}'}_{\underline{s}}, \underbrace{t-t'}_{\tau}) = 0 \quad \text{für } t < t'}$$

Dies ist die <u>Kausalitäts-bedingung</u>

$-i\omega\tau$

$\underline{\tau > 0}$: $\Gamma(\underline{q},\tau) = -2\pi i \sum_{\omega=\pm cq} \mathrm{Res} \dfrac{e}{\left(-\frac{1}{c^2}\right)(\omega - cq)(\omega + cq)}$

$\uparrow$ Umlauf $\circlearrowright$

$$= 2\pi i c^2 \left(\frac{e^{-icq\tau}}{2cq} + \frac{e^{icq\tau}}{-2cq} \right)$$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \, e^{i\underline{q}\cdot\underline{s}} \left(\frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2iq} \right)$$

Auswertung in Kugelkoord.: $d^3q = q^2 dq \, \overbrace{d(\cos\vartheta)}^{\sin\vartheta \, d\vartheta} \, d\varphi$

$\underline{q}\cdot\underline{s} = qs\cos\vartheta$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq \, q \, \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2i} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \, e^{iqs\cos\vartheta}}_{\frac{e^{iqs} - e^{-iqs}}{iqs}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$\xi := cq$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 s} \int_0^\infty d\xi \left\{ \underbrace{e^{i(\tau - \frac{s}{c})\xi} + e^{-i(\tau - \frac{s}{c})\xi}} \underbrace{- e^{i(\tau + \frac{s}{c})\xi} - e^{-i(\tau + \frac{s}{c})\xi}} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi s} \left\{ \delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \underbrace{\delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right)}_{0 \text{ für } \tau > 0} \right\}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ikx} = \delta(x)$$

<u>Ergebnis</u>:

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \, \delta\left(t - t' - \dfrac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}}$$

retardierte Green'sche Fkt. (kausal)

Phys. Interpretation

$|r-r'| = c(t-t')$

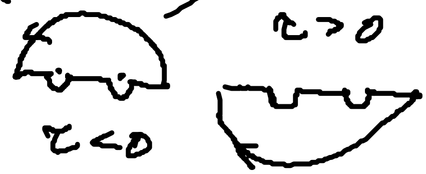
$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ ist das Potenzial $\phi(\underline{r},t)$, das von einer pkt.-förmigen Ladungsdichte $\rho/\epsilon_0 = \delta(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit t' erzeugt wird.

Eigenschaften: (i) Kausalität

(ii) Ausbreitung der Punktstörung als kugelförmige Front mit Phasengeschw. c:

$$|\underline{r}-\underline{r}'| = c(t-t')$$

NB: Für Integrationsweg



erhält man die avancierte Greenfkt: Kugelwelle zieht sich in 1 Pkt. zusammen $\rightarrow$ akausal

• Mit $u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \, \dfrac{\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi\,|\underline{r}-\underline{r}'|} f(t',\underline{r}')$

$$= \int d^3r' \frac{f\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|}$$

folgt

Retardierte Pot. für bel. $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}}$$

ϕ, A sind bestimmt durch $\underline{r}'$ zu retardierten Zeiten $t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$

$\Rightarrow$ endl. Ausbreitungsgeschw. der elektromagn. Wirkungen oder Felder mit c.