

4.2 Retardierte Potenziale

Aufgabe: Lösung der inhomog. Wellengl.

$$\begin{aligned}\square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j}\end{aligned}$$

(Lorentz-Eichung)

zu vorgegebenen erzeugenden Quellen $\rho(\underline{r}, t)$, $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und Randbed. $\phi, \underline{A} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

Methode: Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

vgl. Elektrostatik

$$\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$$

$$\square u(\underline{r}, t) = -f(\underline{r}, t)$$

Fourier-Transform $\left\{ \begin{array}{l} u := \{ \phi \\ \underline{A} \end{array} \right.$

$\hat{\square}^{-1} = -\hat{G}$ $\left\{ \begin{array}{l} f := \{ S/\epsilon_0 \\ \mu_j \end{array} \right.$

$$\hat{u}(\underline{k}, \omega) = \hat{G} \cdot \hat{f}(\underline{k}, \omega)$$

$$\hat{\phi}(\underline{k}) = \hat{G} \hat{f}, \quad \hat{G} = \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

Rück-Transform \Downarrow

$$u(\underline{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') f(\underline{r}', t')$$

$$\square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \delta(t-t')$$

$$\phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}' G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

mit $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}'-\underline{r}|}$

Kausalitätsbed.: $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \stackrel{!}{=} 0$

$\Delta G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')$
für $t' > t$
(Zukunft)
 $t = \text{heute}$

damit $u(\underline{r}, t)$ nur von $f(\underline{r}', t')$ mit $t' < t$ beeinflusst wird.

Fourier-Transform:

$$f(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\underline{q}, \omega) e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\hat{f}(\underline{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\underline{r}, t) e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

Ebenso

$$u(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{u}(\underline{q}, \omega) e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \square u(\underline{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{u}(\underline{q}, \omega) \underbrace{\square e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}}_{-(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\underline{q}, \omega) e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \hat{u}(\underline{q}, \omega) = \hat{f}(\underline{q}, \omega)$$

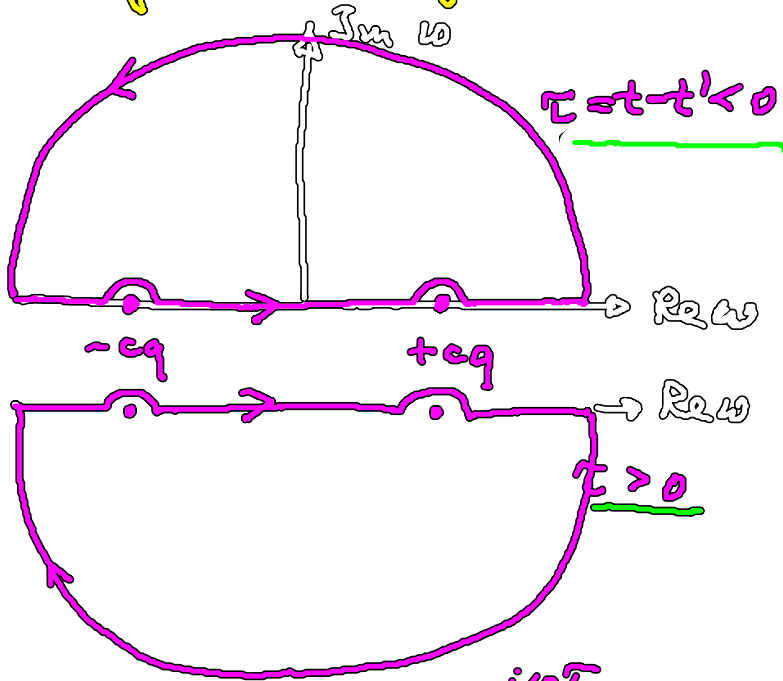
$$\Rightarrow \hat{u}(\underline{q}, \omega) = \frac{\hat{f}(\underline{q}, \omega)}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \hat{G} = \frac{1}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Rücktrafo:

$$\begin{aligned} u(\underline{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega t)}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{f}(\underline{r}', t') e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r}' - \omega t')} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\{ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i(\underline{q}\cdot(\underline{r}-\underline{r}') - i\omega(t-t'))}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\} \hat{f}(\underline{r}', t') \\ &\quad G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \end{aligned}$$

Berechnung des Green'schen Fkt. durch komplexe Integr.

Integrand hat Pole bei $\omega = \pm c q$
 Green'sche Fkt. wird eindeutig durch Festlegung des
 Integrationswegs um die Pole herum:



Integral über Halbkreis:

$$\omega = R e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$d\omega = R e^{i\varphi} i d\varphi$$

$$|e^{-i\omega\tau}| = e^{\underbrace{R(\sin\varphi)\tau}_{>0} \rightarrow 0} \underbrace{\rightarrow 0}_{<0}$$

$$\frac{\pi \leq \varphi \leq 2\pi}{|e^{-i\omega\tau}| = e^{\underbrace{R(\sin\varphi)\tau}_{<0} \rightarrow 0} \underbrace{\rightarrow 0}_{>0}}$$

$$\Gamma(q, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \oint_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 2\pi i \sum_{\text{Pole}} \text{Res}$$

(Residuensatz)

$\tau < 0$: keine Pole im Inneren von C

$$\Rightarrow \Gamma(q, \tau) = 0 \Rightarrow G(\underbrace{t-t'}_{\tau}, \underbrace{t-t'}_{\tau}) = 0$$

Dies ist die Kausalitäts-
bedingung

für $t < t'$

$-i\omega\tau$

$$\underline{\tau > 0} : \Gamma(q, \tau) = -2\pi i \int_{\omega = \pm cq}^{\text{Res}} \frac{e}{(-\frac{1}{c^2})(\omega - cq)(\omega + cq)}$$

↑
Umbau! \odot

$$= 2\pi i c^2 \left(\frac{e^{-icq\tau}}{2cq} + \frac{e^{icq\tau}}{-2cq} \right)$$

$$G(\underline{x}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{q} e^{i\underline{q} \cdot \underline{x}} \left(\frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2iq} \right)$$

Auswertung in Kugelkoordinat. $\therefore d\underline{q} = q^2 dq d(\cos\vartheta) d\varphi$



$$q \cdot \underline{x} = qs \cos\vartheta$$

$$G(\underline{x}, \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq q \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2i} \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) e^{iqs \cos\vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\zeta := cq$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty d\zeta \left\{ \begin{array}{ll} e^{i(\tau - \frac{s}{c})\zeta} & -i(\tau - \frac{s}{c})\zeta \\ + e^{-i(\tau - \frac{s}{c})\zeta} & i(\tau + \frac{s}{c})\zeta \\ - e^{i(\tau + \frac{s}{c})\zeta} & -i(\tau + \frac{s}{c})\zeta \\ - e^{-i(\tau + \frac{s}{c})\zeta} & \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi s} \left\{ \delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right) \right\}$$

$0 \text{ für } \tau > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x)$$

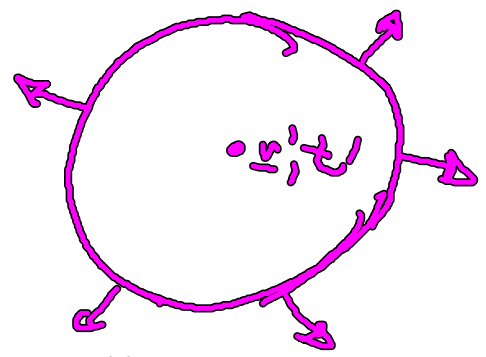
Ergebnis:

$$G(\underline{x} - \underline{x}', \tau - \tau') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}'|} \delta\left(\tau - \tau' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c}\right) & \tau > \tau' \\ 0 & \tau < \tau' \end{cases}$$

retardierte Green'sche Fkt. (kausal)

Phys. Interpretation

$G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')$ ist das Potenzial $\phi(\underline{x}, t)$, das von einer pkt. f6rmigen Ladungsdichte $g/\epsilon_0 = \delta(\underline{x}-\underline{x}', t-t')$ am Ort \underline{x}' zur Zeit t' erzeugt wird.



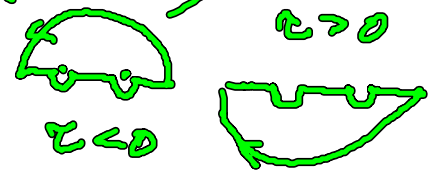
$$|\underline{r}-\underline{r}'| = c(t-t')$$

Eigenschaften: (i) Kausalit6t

(ii) Ausbreitung der Punktst6rung als kugelf6rmige Front mit Phasengeschw. c :

$$|\underline{x}-\underline{x}'| = c(t-t')$$

NB: F6r Integrationsweg



erh6lt man die
avariante Greenfkt:

Kugelwelle rieht sich in

1 Pkt. zusammen \rightarrow acausal

• Mit $u(\underline{x}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|} f(\underline{x}', t')$

folgt

$$= \int d^3r' \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{4\pi |r-r'|}$$

Retardierte Pot. für bel. $\rho(r, t)$, $\underline{j}(r, t)$:

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}$$

$$\underline{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}$$

ϕ , \underline{A} sind bestimmt durch r' zu
retardierten Zeiten $t' = t - \frac{|r-r'|}{c}$

\Rightarrow endl. Ausbreitungsgeschw.

der elektromagn. Wirkungen
oder Felder mit c .