

4.3 Multipolstrahlung

$$\begin{aligned} \square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}, t) \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \phi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}$$

Ziel: Retardierte Potenziale sollen für
nämlich lokalisierte zeitabh. Ladungs-
u. Stromverteilungen analog zu den
statischen Multipolentwicklungen (§1.4, 2.4)
für $r \gg r'$ entwickelt werden

Voraus.: Lorentz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \nabla \cdot \underline{A} = 0$
 $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$
 $\underline{A}(\underline{r}, t) \Rightarrow \phi(\underline{r}, t) \Rightarrow \underline{E}(\underline{r}, t), \underline{B}(\underline{r}, t)$

1. Näherung: $r \gg a$ (Ausdehnung der Quelle)

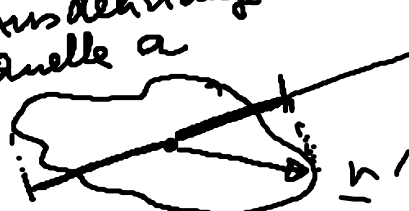
Mit $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\underline{r} \cdot \underline{r}') + \dots$ ergibt sich

$$A(\underline{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})$$

2. Näherung: $t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}} + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{cr} + \dots$

falls $\tau \gg \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \frac{a}{c} =: \tau$ (relative Retardierung der einzelnen Punkte der Quelle)

Ausdehnung der Quelle a



τ

(z.B. harmon. Anregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$)

$\omega\tau = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c}$

$\tau =$ Anreg. periode

\Rightarrow

$a \ll \lambda$
$a \ll r$

Wellenlänge

$$\Rightarrow \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \approx \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{cr} \frac{\partial \underline{j}(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}', \tau) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') (1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$$

niedrigste Ordn. (verschwindet nicht, da $\nabla \cdot \underline{j} \neq 0$)

\longleftrightarrow § 2.4

Mit $\nabla_{r'} \cdot [\underline{x}'_k \underline{j}] = \underline{x}'_k \underbrace{\nabla_{r'} \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau)}_{-\dot{\rho}(\underline{r}', \tau)} + \dot{j}_k$ und $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_{r'} \cdot (\underline{x}'_k \underline{j}) = 0$

folgt

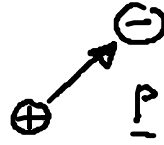
$$\int d^3r' \dot{j}_k(\underline{r}', \tau) = + \int d^3r' \underline{r}'_k \dot{\rho}(\underline{r}', \tau) = \dot{p}_k(\tau)$$

mit dem el. Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}', \tau)$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \quad \underline{\text{el. Dipolstrahlung}}$$

Hertz'scher Dipol (H. Hertz 1857-1894):

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$$



$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{-i\omega \mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r + i(kr - \omega t)}$$

$$= \frac{-i\omega \mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r}$$

Kugelwelle

Lorentz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \underline{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \right\}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{r} \underline{p}(t - \frac{r}{c}) \right\} + \underbrace{\phi_{\text{stat}}(\underline{r})}_0 \quad (\text{O.B.d.A.})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c r^2} \underline{r} \cdot \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{p}(t - \frac{r}{c}) \right\}$$

$$\sim \frac{1}{r} \qquad \qquad \qquad \sim \frac{1}{r^2}$$

Grenzfälle:

(i) Fernzone (Wellenzone): $r \gg \lambda (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \gg 1}$

$$\phi(r, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c r^2} \underline{r} \cdot \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \quad \Leftrightarrow \frac{\omega}{c} r \gg 1$$

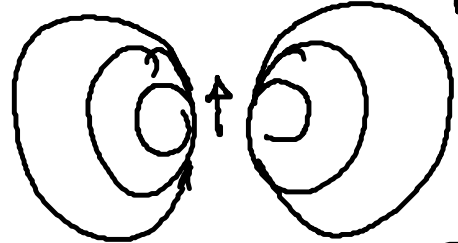
$\frac{1}{c} \dot{p} \sim \frac{\omega}{c} p \gg \frac{p}{r}$
Retardierung wichtig!

(ii) Nahzone (quasi-stat. Bereich): $\lambda \gg r (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \ll 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{p}(t)} \quad \left(-\frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \dot{\underline{p}}(t) + \frac{1}{cr^2} \underline{r} \cdot \dot{\underline{p}}(t) \right)$$

instantanes Dipolenzial!

Retardierung kompensiert \dot{p} -Term



Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{1}{r} \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

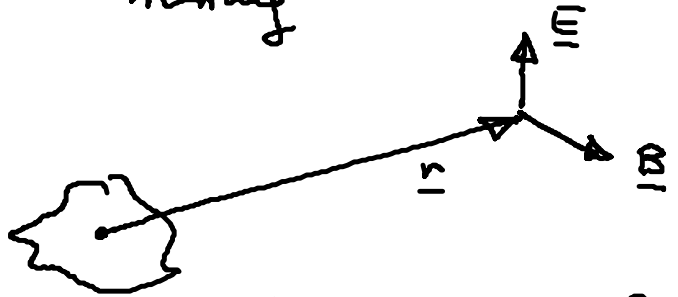
$$= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^2} \left[\ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^3} \left[\ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] \times \underline{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{B} \times \left(\frac{\underline{r}}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^3} (\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}) \times \underline{r} = \frac{1}{c} \underline{E}$$

Ausbreit. richtung

$\underline{r} \perp \underline{E} \perp \underline{B}$



Ausbreitung wie freie Kugelwelle (Fernzone)

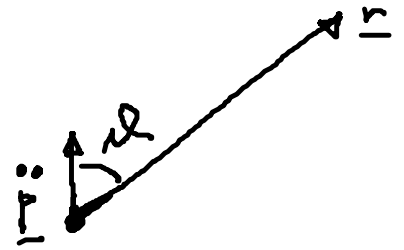
(NB: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B} \perp \underline{r}$ aber \underline{E} hat longitud. Komp. $\underline{E}_{\parallel} \parallel \underline{r}$ neben $\underline{E}_{\perp} \perp \underline{r}$.)

Poynting-Vektor (Energiedichte):

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times \underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B} \times (\underline{B} \times \underline{r})$$

$$= - \frac{\epsilon}{\mu_0} \left\{ \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{r})}_{0} \underline{B} - B^2 \underline{r} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{(\ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r})^2}_{|\ddot{\underline{p}}|^2 r^2 \sin^2 \alpha} \frac{1}{r} \underline{r}$$



$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \alpha \frac{\underline{r}}{r}$$

wegen Energieerhaltung:



$\underline{p}(t)$

Abstrahlcharakteristik
des Hertz'schen Dipols

stark richtungs-
abhängig

$$(\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} : |\ddot{\underline{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4$$

NB : Dies ist eine Näherung für eine
lineare Antenne



Höhere Terme: magnet. Dipol-,
el. Quadrupolstrahlung