Tutorium Martin Kliesch

(Freitag) : Raum EW 184

um 12.00

24.10.2007

$$i\,\partial/\partial t\,\Psi = \hat{H}\Psi$$

$$\hat{H} = \underline{\alpha}\,\underline{p} + \beta m \qquad (1.31)$$

Quadrieren, rel. Pyth.

hier ohne ϕ, A

$$\Rightarrow \quad \beta^2 = 1 , \qquad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\,\delta_{ij} \qquad i = 1,2,3 \qquad (1.32)$$

Zeige, dass β, α_i 4×4-Matrizen sind:

- $\hat{H}$ soll hermitsch sein, $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$: reelle Eigenwerte
  α_i und β hermitsch, $\alpha_i = \alpha_i^\dagger \equiv (\alpha_i^*)^T$

- Aus (1.32): $\beta^2 = \alpha_i^2 = \mathbb{1}$
  $\Rightarrow \beta = \beta^\dagger = \beta^{-1} \Rightarrow \beta$ ist unitär,
  ebenso α_i unitär

- $\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta^{-1} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spur}}}{\mathrm{Tr}}\, \alpha_i = -\mathrm{Tr}\, \beta \alpha_i \beta^{-1} = -\mathrm{Tr}\, \alpha_i$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\, \alpha_i = 0$

  ebenso $\mathrm{Tr}\, \beta = 0$

- $\beta^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ Eigenwerte ± 1
  $\alpha_i^2 = 1 \Rightarrow$ "

  $\mathrm{Tr}\, \beta = \sum$ Eigenwerte $= 0$
  $\mathrm{Dim}\, \beta$, $\mathrm{Dim}\, \alpha_i$ gerade: $2, 4, 6, \ldots$

- 2×2 Matrizen tun es nicht:
  $N\times N$-Matrizen, p = Anzahl reeller Parameter

Matrix M	p
$N \times N$: komplex	$2N^2$
$M = M^\dagger$	$\underbrace{N}_{\text{Diag.}} + N^2 - N = N^2$
$M = M^\dagger$, $\mathrm{Tr}\, M = 0$	$N^2 - 1$

Jetzt $N=2$: $p = 3$ reelle Parameter

2×2-Matrizen M, $M = M^\dagger$ und $\mathrm{Tr}\, M = 0$ lassen sich als Linearkombinationen mit $p=3$ reellen Parametern in der Basis der

Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z$$

$$M = \sum_{i=1}^{3} p_i \sigma_i \equiv \underline{p}\, \underline{\sigma}$$

$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Vektor der Pauli-Matrizen

$\underline{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$

Es gilt
$$\sigma_i^2 = 1$$
$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i$$
$$\mathrm{Tr}\, \sigma_i = 0$$

Anti-Vertauschungsrelationen:

$$\underbrace{\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i}_{\equiv \{\sigma_i, \sigma_j\}} = 2\delta_{ij}$$

$\equiv \{\sigma_i, \sigma_j\}$ Anti-Kommutator

Paulimatrizen sind 3 linear unabhängige, antikommutierende, spurlose Matrizen.

Aber: β, α_i in (1.32)

$$\boxed{\beta^2 = 1 \qquad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \qquad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}}$$

4 linear unabh. Matrizen

$\Rightarrow$ Wir brauchen 4x4-Matrizen!

Hier gewählt:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_i: \text{Pauli-Matrix}$$

Es gilt $\alpha_i^2 = \mathbb{1}_{(4\times4)}$, $\beta^2 = \mathbb{1}$

4x4 Einheits-matrix

$\alpha_i = \alpha_i^\dagger$, $\beta = \beta^\dagger$, α_i, β unitär und spurlos

- Die WF in der Dirac-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (\underline{\alpha}\cdot\hat{\underline{p}} + \beta m)\Psi$$

4-komponentige Spinoren) $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}$

$$\hat{\underline{p}} = \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla} = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad x = (ct, \underline{x})$$

$$\underline{\alpha}\hat{\underline{p}} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \Psi_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \right. \qquad \Psi(x)$$

$$\beta m \Psi = m \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

5. Dirac-Gleichung und Spin *: nichtrelativistischer Grenzfall

Dgl. mit $\underline{A}$, ϕ

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(\underline{\alpha}\left(\hat{\underline{p}} - e\underline{A}\right) + \beta m + e\phi\right)\Psi$$

* GREINER Bd. 6

$\hbar = c = 1$

Jetzt Ansatz / Zerlegung

$$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} \cdot e^{-imc^2/\hbar\, t}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix}\chi_1 \\ \chi_2\end{pmatrix}$$

Damit

$$i\,\partial/\partial t\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{\sigma}\left(\hat{\underline{p}} - e\underline{A}\right)\chi \\ \underline{\sigma}\left(\hat{\underline{p}} - e\underline{A}\right)\varphi\end{pmatrix} + e\phi\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} - \underbrace{2mc^2}_{\text{Ruheenergie}}\begin{pmatrix}0 \\ \chi\end{pmatrix}$$

Jetzt Annahme

Ruheenergie $mc^2 \gg$ kin., pot. Energie

$$\left|mc^2\chi\right| \gg \left|i\hbar\,\partial/\partial t\,\chi\right|, \left|e\phi\,\chi\right|$$

$$\Rightarrow \quad \chi \cong \frac{1}{2mc^2}\,\underline{\sigma}\left(\underline{p} - e\underline{A}\right)\cdot\varphi$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$i\,\partial/\partial t\,\varphi = \frac{1}{2m}\left(\underline{\sigma}\left(\underline{p} - e\underline{A}\right)\right)^2\varphi + e\phi\varphi$$

$\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Vektor der P.-Matrizen

Theorem: $(\underline{\sigma}\,\underline{A})(\underline{\sigma}\,\underline{B})$

$\underline{A} = (A_1, A_2, A_3)$

vektorwertiger Operator

$\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$$= \underline{A}\,\underline{B} + i\,\underline{\sigma}\,(\underline{A} \times \underline{B})$$

Beweis als Aufgabe

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j = 2i\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l$$

„Drehimpuls" VR

(Vertauschungsrelationen)

$$(\underline{p} - e\underline{A}) \times (\underline{p} - e\underline{A}) =$$

$$= -\frac{e\hbar}{i}\,\underline{B} \quad \text{Magnetfeld}$$

$\underline{A} = \underline{A}(t, \underline{x})$

$[x, p] = i\hbar$

Einsetzen:

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\,\underline{\sigma}\,\underline{B} + e\phi\right]\varphi}$$

Pauli-Gleichung

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$ 2komponentiger Spinor

- Spin und Magnetfeld gekoppelt.
- Spin $\frac{1}{2}$ für Elektronen, Diskussion weiter unten

6. Weitere Eigenschaften der Dirac-Gleichung → (1.36)

a) Kontinuitätsgleichung $\quad i\partial_t \psi = (\underline{\alpha}\underline{p} + \beta m)\psi$

$\psi^\dagger (1.36)$

$(1.36)^\dagger \psi$

$$i\psi^\dagger \dot{\psi} = \psi^\dagger(\underline{\alpha}\underline{p} + \beta m)\psi$$

$$-i\dot{\psi}^\dagger\psi = \underline{p}\psi^\dagger\underline{\alpha}\psi + m\psi^\dagger\beta\psi$$

$$\underbrace{i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi)}_{\rho} = \psi^\dagger\underline{\alpha}(\underline{p}\psi) - (\underline{p}\psi)^\dagger\underline{\alpha}\psi$$

$$= -i\sum_{k=1}^{3}\psi^\dagger\alpha_k(\partial_k\psi) + (\partial_k\psi^\dagger)\alpha_k\psi =$$

$$= -i\sum_k \partial_k \underbrace{(\psi^\dagger\alpha_k\psi)}_{\underline{j}} = -i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\underbrace{\psi^\dagger\alpha_1\psi}_{} + \ldots\right)$$

∂

$(\ldots)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$\rho = \psi^\dagger\psi$ Dichte

$\underline{j} = \psi^\dagger\underline{\alpha}\psi$ Stromdichte $\quad \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

[W Dichte ρ setzt sich aus den 4 Komponenten des Spinors ψ | $j_1 = (\ldots)\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_1 \\ \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

zusammen. $\qquad \beta_L = \qquad (\alpha_2) \qquad (\alpha_3)$

b) Lorentz-Invarianz

Umdefinition der Matrizen α_k, β

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^k \equiv \beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

„γ-Matrizen",

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^k)^2 = -\underline{1} \quad k = 1,2,3$$

$$\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu = 2\, g^{\nu\mu} \qquad \nu = 0,1,2,3$$

Zeit

$$g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Raum

Nachrechnen!

Relativistische Notation:

$$x^\mu \Leftrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \equiv (ct, \underline{x})$$

kontravarianter Vierervektor

$$x_\mu \Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\underline{x})$$

kovarianter Vierervektor

- „relativist. Skalarprodukt"

$$x_\nu x^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{3} x_\nu x^\nu = c^2 t^2 - \underline{x}^2$$

bleibt invariant unter Lorentztransformationen.