26.10.2007

Heute <u>zwei</u> Kolloquia!

16^{00} h (mit Stehempfang)
17^{00} h (mit Stehempfang)

$x^\mu = (ct, \underline{x})$ kontra-

$x_\mu = (ct, -\underline{x})$ ko- variante 4er Vektor

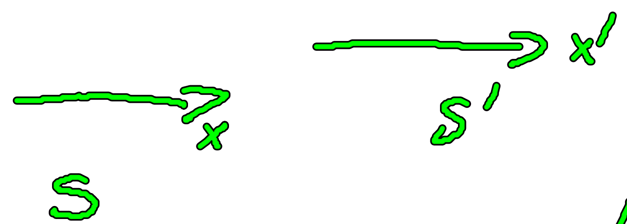
Relativ. Skalarprodukts

$x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \underline{x}^2$ bleibt invariant unter Lorentztrafos

$$g_{\nu\mu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

„Hoch" und „Herunterziehen" $x_\nu = g_{\nu\mu} \underbrace{x^\mu}_{\text{Summation}}$

" Lorentztrafo



Geschwindigkeit $\underline{v} = v\,\underline{e}_x$

$\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \quad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Invarianz von $x_\mu x^\mu$ bei Lorentztransformation

In S': $x'_\nu x'^\nu = g_{\nu\mu} x'^\mu x'^\nu =$

$$= \sum_{\mu\alpha\beta\nu} \underbrace{g_{\nu\mu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta}_{g_{\alpha\beta}\ \text{(Nachrechnen)}} x^\alpha x^\beta$$

$= g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = x_\beta x^\beta$

- Gradient: $\partial^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ kontravariante Gradient

$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ kovariante

Dirac-Gleichung aus

$i\,\partial/\partial t\,\Psi = \hat{H}\Psi\,,\quad \hat{H} = \underline{\alpha}\,\underline{p} + \beta m$

$\Leftrightarrow \left(i\,\partial/\partial t - \underline{\alpha}\,\frac{1}{i}\,\underline{\nabla} - \beta m\right)\Psi = 0 \;/\; \beta\cdot$ von links

$\left(i\gamma^0\,\partial/\partial t + i\sum_{k=1}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - m\right)\Psi = 0 \qquad \beta^2 = 1,\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\gamma^0 = \beta\,,\quad \gamma^k = \beta\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$

$\partial/\partial t = \partial_0\,;\quad \partial/\partial x^k = \partial_k$

$$\boxed{\left(i\gamma^\nu\partial_\nu - m\right)\Psi = 0}$$ Dirac-Gleichung

- Relativistische Invarianz zeigen:

Wir fordern die gleiche Form der Dirac-Gleichung in zwei Systemen S und S', die sich gleichf. gegen bewegen.

$$\left(i\gamma^\nu\partial_\nu - m\right)\psi = 0 \quad \text{in } S$$

$$\left(i\gamma'^\nu\partial'_\nu - m'\right)\psi' = 0 \quad \text{in } S'$$

In beiden Systemen $m = m'$: gleiche Ruhmasse

$$\gamma'^\nu = \gamma^\nu$$

Aber: $\partial_\nu \neq \partial'_\nu$ und $\psi \neq \psi'$

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{(L^{-1})^\nu{}_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (L^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$$

(Ableitung)

$$\partial'_\nu = (L^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu$$

Also muß gelten

$$\left(i\gamma^\nu\partial'_\nu - m\right)\psi' = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(i\gamma^\nu (L^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu - m\right) S\psi = 0}$$

$\psi' = S\psi$ ← 4x4-Matrix

S^{-1} von links

$$\Rightarrow \quad i \underbrace{\left(S^{-1}\gamma^\nu S\right)\left(L^{-1}\right)^\mu{}_\nu \partial_\mu}\Psi - m\Psi = 0$$

4×4 Matrix

Vergleich: $\quad i\,\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi - m\Psi = 0 \qquad$ im System (bewegend ')

$\Rightarrow$ Fordert $\boxed{S^{-1}\gamma^\nu S = L^\nu{}_\beta \gamma^\beta}$

Damit $\quad i\, \underbrace{L^\nu{}_\beta \gamma^\beta \left(L^{-1}\right)^\mu{}_\nu}_{\delta_\beta{}^\mu} \partial_\mu = \gamma^\beta \partial_\beta$

Wir benötigen $\boxed{S^{-1}\gamma^\nu S = L^\nu{}_\beta \gamma^\beta}$ (1.48)

für die relativistische Invarianz.

- Konstruktion der Matrix S aus (1.48).

Ansatz: Für kleine $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$

extremfall $\beta = 0 \Rightarrow S = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Wähle Korrektur der Ordnung $O(\beta)$: dann „Taylorentwicklung" der Matrix

$$S = S(\beta) = \mathbb{1} + \beta \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^0 + \frac{\beta^2}{2!} \dots$$

$$= \mathbb{1} - \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\beta^2)$$

Für beliebiges β bekommt man jetzt die Matrix $S(\beta)$ durch Exponentiieren

$$S(\beta) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{N}\gamma^1\gamma^0\right)^N = e^{\frac{\beta}{2}\gamma^1\gamma^0}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x$$

Damit für alle β.

$$e^{\hat{X}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{X}^k$$

Exponentialfunktion einer Matrix

tiefe Mathematik: Lie gruppen, Lie algebren

Ausrechnen: $\boxed{S(\beta) = \cosh\frac{\beta}{2}\,\mathbb{1} + \sinh\frac{\beta}{2}\,\gamma^1\gamma^0}$

• Kontinuitätsgleichung

Viererstromdichte $j^\mu \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$

z.B $\gamma^0\gamma^0 = 1$

$j^0 = \psi^\dagger \psi$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad (1.53)$$

• ist ebenfalls Lorentz-invariant

• $j'^\mu = L^\mu{}_\nu j^\nu$

4er-Strom transformiert sich wie kontravarianter Vektor

(AUFGABE)

7. Lösungen der Dirac-Gleichung (freie Teilchen)

$$\left(i\partial_\mu \gamma^\mu - m\right)\psi = 0 \Leftrightarrow \left[i\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) - m\right]\psi = 0$$

a) Separationsansatz

$$\psi(\underline{x}, t) = e^{-iEt}\,\phi(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \left[E\gamma^0 + i\left(\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \dots\right) - m\right]\phi(\underline{x}) = 0$$

Ansatz $\phi(\underline{x}) = \phi = \text{const}$

$$\rightarrow \left[E\gamma^0 - m\right]\phi = 0 \quad , E \neq 0$$

$$\gamma^0\phi = \frac{m}{E}\phi \qquad \text{Eigenwertgleichung}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \phi = \frac{m}{E} \phi$$ hat zwei Eigenwerte

$$\underbrace{\frac{m}{E} = +1}_{\underline{\underline{E = mc^2}}} \Rightarrow \phi_+ = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m}{E} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

positive Energie

$$\underbrace{\frac{m}{E} = -1}_{E = -mc^2} \Rightarrow \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

negative Energie

Diskussion:

- $\Psi_+(\underline{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = +mc^2$

beschreibt ruhendes Teilchen der Masse m,
Ruheenergie $E = mc^2 > 0$

- $\underline{\text{Zwei}}$ Komponenten u_1, u_2

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

beschreiben Spin $\frac{1}{2}$ des Teilchens

- Dirac-Gleichung beschreibt Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen

- $\Psi_-(x, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \} \text{ unten} \quad E = -mc^2$

hat negative Energie).
Interpretationsproblem wie bei der KG-Gl.

Zufriedenstellend gelöst erst in der Quantenfeldtheorie (Teilchen-Erzeugung und Vernichtung) und der <u>zweiten Quantisierung</u>.

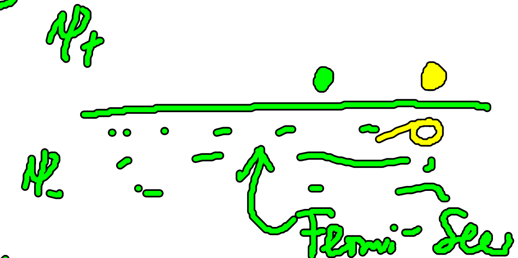
„Anschauliche Interpretation":
Dirac'sche Löchertheorie *

* C. ITZYKSON, J-B ZUBER „Quantum Field Theory"

— Annahme vieler „gleichartiger" Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m.

— Annahme: alle Zustände Ψ_- mit negativer Energie sind besetzt.
Das definiert einen „Grundzustand" („Vakuum").

— Ein einzelnes Elektron ist dann z.B. das Vakuum + 1 Teilchen in einem Zustand Ψ_+.



— „Teilchen-Loch-Anregung"
Anregung von Ψ_- nach Ψ_+, läßt „<u>Loch</u>" im <u>Fermi-See</u> zurück (positive Ladung (fehlende negative Ladung)).

— Analog. Konzept z.B. in der Halbleiterphysik
Valenzband

Zerstrahlung

VORTEILE der Löchertheorie :
- Voraussage des Positrons
- Paarvernichtung/Erzeugung

NACHTEILE der Löchertheorie :
- Unendlicher „See" nicht beobachtbarer Teilchen
- Beruht auf Pauli-Prinzip und funktioniert nicht mit der KG Gleichung, die Bosonen mit Spin 0 beschreibt.