

31.10.2007

$$(i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi = 0$$

$$\psi_{\pm}(x,t) = e^{\mp i(Et - \underline{k} \cdot \underline{x})} \phi_{\pm}(E, \underline{k})$$

$$E = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2} > 0$$

$$k_\mu = (k_0, -k_x, -k_y, -k_z) \quad k_0 = E$$

$$\begin{pmatrix} \gamma^0 E - \gamma^1 k_x - \dots - m \\ -\gamma^0 E + \gamma^1 k_x + \dots - m \end{pmatrix} \phi_{\pm} = 0 \Leftrightarrow (\gamma^{\mu} k_{\mu} - m) \phi_{\pm} = 0$$

$$(-\gamma^0 E + \gamma^1 k_x + \dots - m) \phi_{-} = 0 \xrightarrow{(-1)} (\gamma^{\mu} k_{\mu} + m) \phi_{-} = 0$$

Gleichungen für Spinoren (4-komponentige Vektoren)
 ϕ_{\pm} . Trick:

$$(\gamma^{\mu} k_{\mu} + m)(\gamma^{\mu} k_{\mu} - m) = \underbrace{\gamma^{\mu} k_{\mu} \gamma^{\nu} k_{\nu}}_{k_0^2 (\gamma^0)^2 + \dots} - m^2 = E^2 - \underline{k}^2 - m^2 = 0$$

$$1) \underbrace{(\gamma^{\mu} k_{\mu} - m)(\gamma^{\nu} k_{\nu} + m)}_{\tilde{\Phi}_{+}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\tilde{\Phi}_{+} = (E + m) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - k_x \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - k_y \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$= \begin{pmatrix} (E+m) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \underline{k} \underline{\sigma} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \underline{k} \underline{\sigma} = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + k_z \sigma_z$$

$$\overbrace{(Y^\mu k_\mu + m)(Y^\nu k_\nu - m)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$v=0: E Y^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow -(E+m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - k_x \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \dots$$

$$= - \begin{pmatrix} k_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ (E+m) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = - \underline{\Phi}_-$$

Insgesamt 4 linear unabh. Lösungen

Basis: $\Phi_+^{(1)} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} (E+m) \underline{u}^{(1)} \\ k_x \underline{u}^{(1)} \end{pmatrix}$

$$\Phi_+^{(2)} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} (E+m) \underline{u}^{(2)} \\ k_x \underline{u}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$\underline{u}^{(1)},$
 $\underline{u}^{(2)}$
 Basis
 des \mathbb{C}^2
 z.B. $\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

freierfall $\underline{k}=0 \Rightarrow \phi_+^{(1,2)} = \mathcal{N}(E+m) \begin{pmatrix} \underline{\mu}^{(1,2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Teilchen

$$\phi_-^{(1,2)} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \underline{k} \cdot \underline{\sigma} \quad \underline{\mu}^{(1,2)} \\ (E+m) \quad \underline{\mu}^{(1,2)} \end{pmatrix}$$

freierfall $\underline{k}=0 \Rightarrow \phi_-^{(1,2)} = \mathcal{N}(E+m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{\mu}^{(1,2)} \end{pmatrix}$ Antiteilchen / Löcher

\mathcal{N} : Normierungsfaktor.

Häufig $|\underline{\mu}^{(i)}| = 1, i=1,2$

$$\underline{\mu}^{(1)} \cdot \underline{\mu}^{(2)} = 0$$

8. Helizität und Spin

Zur Erinnerung: Spin $\frac{1}{2}$, $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$
Vektor der Pauli-Matrizen.

treten auf in $\underline{k} \cdot \underline{\sigma}$ in den Dirac-Spinoren $\phi_{\pm}^{(i)}$.
↑ z

$$\hat{\underline{k}} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) \hat{x}$$

$$\Rightarrow \hat{k}_\sigma = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

AUFGABE

Eigenvektoren von \hat{k}_σ : $|\uparrow, \hat{k}\rangle$, $|\downarrow, \hat{k}\rangle$
 2-Komp. Vektor, 2-Komp. Vektor

EW sind ± 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition: Helizitätoperator

$$\hat{k}_Z \equiv \begin{pmatrix} \hat{k}_\sigma & 0 \\ 0 & \hat{k}_\sigma \end{pmatrix}$$

Die Spinoren $\phi_{\pm}^{(i)}$ als Eigenvektoren von \hat{k}_Z :

Hierzu $\underline{\mu}^{(1)} = |\uparrow, \hat{k}\rangle$, $\underline{\mu}^{(2)} = |\downarrow, \hat{k}\rangle$

Damit stellt die Basis der $\phi_{\pm}^{(i)}$ so aus:

$$\phi_{+}^{(\sigma)}(\underline{k}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} (E+m) |\sigma, \hat{k}\rangle \\ \underline{k}_\sigma |\sigma, \hat{k}\rangle \end{pmatrix}$$

$\sigma = \uparrow$
 „positive Helizität“

$$\phi_{-}^{(\sigma)}(\underline{k}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \underline{k}_\sigma |\sigma, \hat{k}\rangle \\ (E+m) |\sigma, \hat{k}\rangle \end{pmatrix}$$

$\sigma = \downarrow$ „negative Helizität“

Wir haben

$$\underbrace{\hat{k}\hat{\Sigma}}_{4 \times 4} \underbrace{\phi_{\pm}^{(\sigma)}(\underline{k})}_{4 \text{ Komp.}} = \sigma \phi_{\pm}^{(\sigma)}(\underline{k})$$

$$\begin{pmatrix} \underline{k}_{\perp} & 0 \\ 0 & \underline{k}_{\perp} \end{pmatrix} \mathcal{N} \begin{pmatrix} \underline{k}_{\perp} | \sigma \hbar \\ (\underline{E} + m) | \sigma, \hbar \end{pmatrix}$$

Zusammenfassend:

Wir haben die Quantenzahlen

\underline{k}	Wellenvektor
\pm	Teilchen/ Antiteilchen
σ	$\pm 1 \hat{=} \uparrow, \downarrow$

Der Helizitätsop. $\hat{k}\hat{\Sigma}$ kommutiert
mit dem Dirac-Hamiltonian $\hat{H} = \underline{\alpha}\underline{p} + \beta m$
(AUFGABE) \Rightarrow Die Eigenfkt von \hat{H} ,
d.h. die Eigenfkt der freien Diracgleichung können
als Eigenfkt. von $\hat{k}\hat{\Sigma}$ gewählt werden.

9. Ausblick
fragen!

$$\hat{k}\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \underline{k}_{\perp} & 0 \\ 0 & \underline{k}_{\perp} \end{pmatrix} \quad \swarrow 2 \times 2$$

$$\underline{h} \underline{\sigma} = h_x \sigma_x + \dots$$

\hbar
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Kapitel II: Formaler Aufbau des QM

Ein Anfang des QM ist der Kommutator

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$



(Check!) \hat{x} : Ortsoperator

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{Impulsoperator}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad \text{Unschärferel.}$$

QM Zustände, WF $\psi(x)$ sind
Elemente eines Hilbertraum,
Operatoren \Rightarrow Messgrößen.

1) Hilbertraum

Def: Ein Hilbertraum ist ein vollständiger unitärer
Raum

Def: Ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \phi | \psi \rangle$
und Norm $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ heißt unitärer Raum

Def: Eine Norm eines komplexen Vektorraums V ist eine Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}_+$, so dass für $\phi, \psi \in V$ gilt

a) $\|\psi\| \geq 0, \|\psi\| = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$

b) $\|c\psi\| = |c| \|\psi\|, c \in \mathbb{C}$

c) $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$.

Def: Ein Skalarprodukt eines Vektorraums V ist eine Abb. $V, V \mapsto \mathbb{C}$ mit

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$$

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\langle \psi + \phi | \chi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle + \langle \phi | \chi \rangle$$

$$\langle \psi | c\phi \rangle = c \langle \psi | \phi \rangle$$

$$c \in \mathbb{C}$$

!
Konjugieren aus
rechter Seite

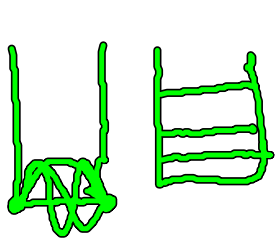
$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* = \overline{\langle \phi | \psi \rangle}$$

Def: Eine Folge $\{\psi_n\}$ in einem normierten Raum heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (ganz) so dass $\forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon$.

Def: Ein unitärer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt vollständig.

Beispiele: a) Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$
n-dimensionaler komplexer VR

b) $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^2$ der qualitativsten bases WF eines Potentialtopfes mit ∞ hohen Wänden in 1D



$$\psi(x) = 0 \text{ für } x=0, L$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n''(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad E_n = \frac{(\hbar n \pi)^2}{2m L^2}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\bullet \langle \psi | \phi \rangle = \int_0^L dx \psi^*(x) \phi(x)$$

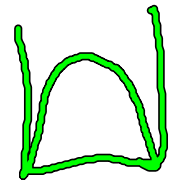
$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

$$\bullet \text{ vollst.: } \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n | \phi \rangle \psi_n(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

Fourier-Reihe

$$\text{vgl.: } x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | x \rangle e_n \quad x \in \mathbb{C}^d$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$



Def: $\{\psi_n\}$ vollständiges Orthonormalsystem eines $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^2$ (VOS)

$$\Leftrightarrow \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

$$\text{und } \phi = \sum_n \langle \psi_n | \phi \rangle \psi_n, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

Satz: (Parseval):

$$\phi = \sum_n \langle \psi_n | \phi \rangle \psi_n \Leftrightarrow$$

$$\|\phi\|^2 = \sum_n |\langle \psi_n | \phi \rangle|^2 .$$

$|\phi\rangle$ Ket

$\langle\phi|$ Bra

Bew. Vollständiger normierter
Raum heißt Banach-Raum $\langle\phi|\phi\rangle$
Bra-Kets

- Funktionalanalysis