

2.11.2007

2.11.2007 Dirac-Notation.
Operatoren
Zweiniveausystem

Kap. 2.2 Dirac-Notation

Bequeme Notation für Zustände $\psi \in \mathcal{H}$
 \mathcal{H} Hilbertraum. Skalarprodukte $\langle \psi | \phi \rangle$

a) Zustände $\phi \leftrightarrow |\phi\rangle$ „Ket“-Vektor
„Dirac-Ket“, „Ket“

b) Skalarprodukt zw. ψ und ϕ , z.B.
 $(\psi, \phi) \leftrightarrow \langle \psi | \phi \rangle$
'Mathematiker'

c) Basis $\psi_n \leftrightarrow |n\rangle$

Vollständigkeitsrelation: $|\phi\rangle = \sum_n \langle n | \phi \rangle |n\rangle$

$$\Rightarrow |\phi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \phi \rangle$$

$$\hat{1} = \sum_n |n\rangle \langle n| \quad \text{1 vollständige Eins}$$

$$\Rightarrow |\phi\rangle = \hat{1} |\phi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n | \phi \rangle}_{\text{Fourier Koeffizienten}}$$

b) Bra-Zustände $\langle \phi |$.
Dualraum von \mathcal{H}

Dualraum \mathcal{H}' eines Hilbertraums \mathcal{H}
ist der Raum der linearen Funktionalen

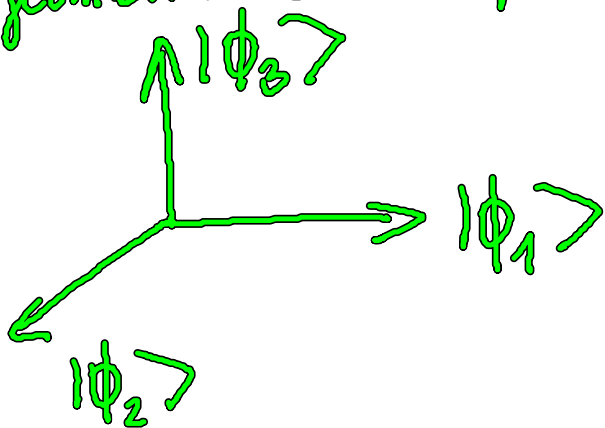
$$\langle \psi | : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}, \quad |\phi\rangle \in \mathcal{X} \mapsto \langle \psi | \phi \rangle$$

Vektor $|\psi\rangle$ als Funktional

$\langle \psi |$ aufgefasst heißt „Dirac-Bra“
oder einfach „Bra“-Vektor.

(Satz von Riesz)

geometrische Interpretation in \mathbb{R}^3 :



a) $|\phi_i\rangle$ als Kets:
normale Vektoren

b) $\langle \phi_i |$ als Bras: sind Abbildungen,

z.B. $\langle \phi_3 | : |\phi\rangle \mapsto \langle \phi_3 | \phi \rangle = (|\phi_3\rangle, |\phi\rangle)$

Projektion auf die 3-Achse.

$\langle \phi_1 |, \langle \phi_2 |, \langle \phi_3 |$ Basis für

Dualraum von \mathbb{R}^3 , d.h.

$$\langle f | = c_1 \langle \phi_1 | + c_2 \langle \phi_2 | + c_3 \langle \phi_3 |.$$

Dirac-Notation ist sehr flexibel, z.B.

$$\begin{aligned}\|\phi\|^2 &= \langle \phi | \phi \rangle = \\ &= \langle \phi | \mathbb{1} | \phi \rangle = \langle \phi | \sum_n |n\rangle \langle n| \phi \rangle \\ &= \sum_n \langle \phi | n \rangle \langle n | \phi \rangle = \sum_n \underbrace{|\langle n | \phi \rangle|^2}\end{aligned}$$

Parsevalsche Gleichung
durch Einschieben der Eins

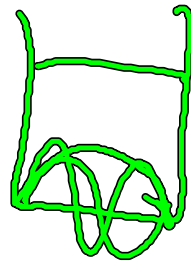
Anderes Beispiel: $\mathbb{1} = \sum_\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|$

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_\alpha \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi \rangle$$

$|n\rangle$

z.B. $n=7$: $|7\rangle \leftrightarrow \psi_7(x)$

für Teilchen im Kasten



$$\mathbb{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \langle n|$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x-x')$$

Kap II.3 Operatoren in der Quantenmechanik

Def: Ein linearer Operator $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

(\mathcal{H} Hilbertraum) erfüllt

$$\hat{A}(\psi + c|\phi\rangle) = \hat{A}|\psi\rangle + c\hat{A}|\phi\rangle,$$

$$c \in \mathbb{C}.$$

Beispiele: a) $n \times n$ Matrizen auf \mathbb{C}^n

b) Impulsoperator $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$

∇ ist linear.

Def: Der Erwartungswert eines Operators \hat{A} im Zustand $|\psi\rangle$ ist

$$\langle \hat{A} \rangle_{|\psi\rangle} \equiv \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

„Sandwich“

z.B. $\hat{A} = \hat{x}$ Ortsoperator

$$|n\rangle \Leftrightarrow \psi(x) \quad \text{WF}$$

$$\langle x \rangle_{\psi} = \frac{\int dx \psi^* x \psi}{\int dx |\psi|^2} = \frac{\int dx x |\psi(x)|^2}{\int dx |\psi(x)|^2} \hat{A}|\psi\rangle \quad \text{Mittelwert}$$

Fehlerrechnung, W-Theorie

Def: Matrixelemente eines Operators \hat{A} :
 $\langle n | \hat{A} | m \rangle = \langle n | \hat{A} | m \rangle$
 in der Basis $\{|n\rangle\}$, $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$
 VOS

Beispiele: $|n\rangle \Leftrightarrow \psi_n(x)$ WF des
 1d harm. Oszillators,
 normiert

$$\hat{A} = \hat{x}^2$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_{|n\rangle} = \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \psi_n^*(x) \psi_n(x)$$

$$\text{Damit } \Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Fluktuation.

Def: Sei zu einem linearen Hilbertraumoperator
adjungierte Operator A^\dagger „dagger“
ist definiert durch

$$\langle \psi | A \phi \rangle = \langle A^\dagger \psi | \phi \rangle$$

„Hermitischer“

$$\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & 5+i \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 5-i \end{pmatrix}$$

Def: Ein linearer Operator A heißt

hermitisch (selbstadjungiert), $A = A^\dagger$

wenn $\langle \psi | A \phi \rangle = \langle A \psi | \phi \rangle \quad \forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 3 & 4-i \\ 4+i & 7.1 \end{pmatrix}$$

Satz:

Eigenwerte hermitescher Operatoren sind
reell. (Beweis)

AVFG.

AXIOM: In der QM werden physikalische Messgrößen als Observablen bezeichnet und durch selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt.

Beispiele: • Energie \hat{H} Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger, \quad \text{z.B. } \mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

• Ort \hat{x} , Impuls $\frac{\hbar}{i} \nabla$

Drehimpuls $\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p}$

• Spin $\frac{1}{2}$, Helizität

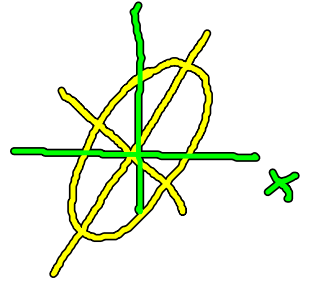
$$\frac{1}{2} \underline{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{\sigma} \end{pmatrix}$$

vgl. (1.65).

Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren

Satz: EW von s.a. Operatoren sind reell,
die zugehörigen EV (Eigenketten) sind
orthogonal.

Spektralzerlegung von s.a. Operatoren \hat{A}
mit Eigenketten $|n\rangle$



$$\hat{A}|n\rangle = a_n |n\rangle$$

keine Entartung: $\hat{A} = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$

$|n\rangle \langle n|$ ist der „Projektionsoperator“ \hat{P}_n
auf den EV $|n\rangle$.

Def.: Ein Projektionsoperator \hat{P} ist
durch $P^2 = P$.

$$\text{Hier } P_n^2 = |n\rangle \langle n| \underbrace{|n\rangle \langle n|}_{=1} = |n\rangle \langle n| = P_n$$

• Falls a_n entartet ist (mehrere EV zum EW a_n),

$$\text{dann } \hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n,$$

\hat{P}_n : Projektor auf den Unterraum
der von den EV zu a_n

aufgepasst wird.

Bemerkung: Spektraldarstellung $\hat{A} \Rightarrow$ Diagonaldarstellung

$$\hat{A} = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|, \quad |n\rangle \text{ EV}$$

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{A} | l \rangle &= \sum_n a_n \underbrace{\langle m | n \rangle}_{\delta_{mn}} \underbrace{\langle n | l \rangle}_{\delta_{nl}} \\ &= a_m \delta_{ml} \end{aligned}$$

AXIOM: Die möglichen Messwerte einer Observablen \hat{A} im Zustand $|\Psi\rangle$ sind ihre Eigenwerte a_n , die mit Wahrscheinlichkeit

$$\text{prob}(a_n) = \frac{\langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

auftreten.

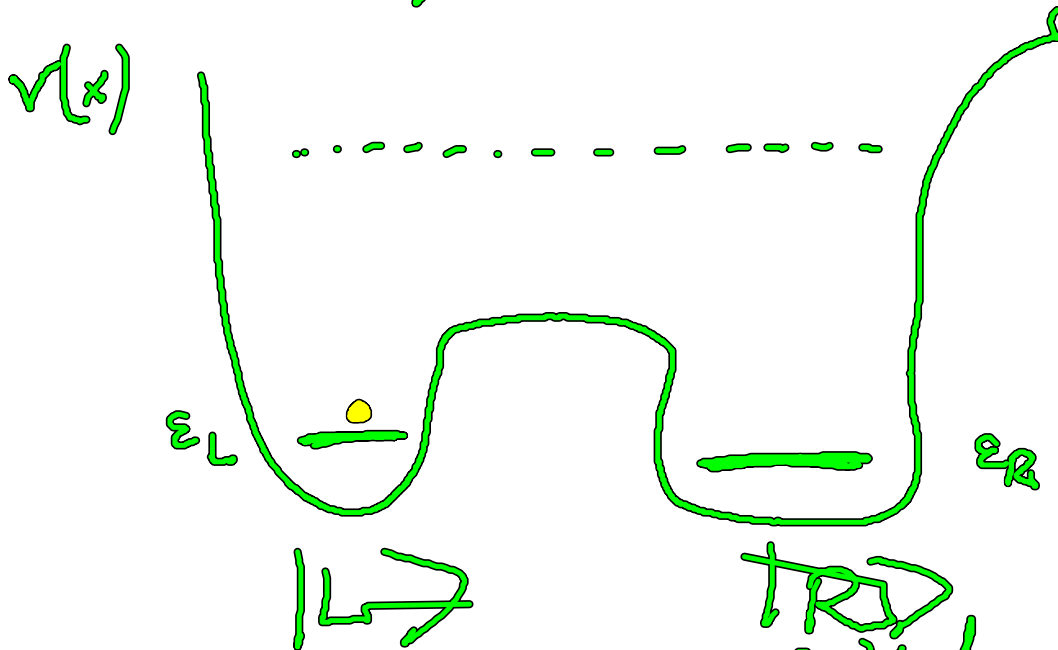
Wird a_n gemessen, so geht $|\Psi\rangle$ instantan in $\frac{\hat{P}_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | \hat{P}_n | \Psi \rangle}}$

(Nur in der entsprechenden Eigenket $|n\rangle$ bei Nicht-Entartung) über.

"Reduktion des Wellenpaketes"
(Kopenhagener Deutung).

II 4. Qubits (Zweiniveausystem)

Wir betrachten ein Teilchen, das zwischen zwei Potentialminima (L links) und (R rechts) hin- und her tunneln kann.



Vereinfachung: Nur zwei Zustände

$|L\rangle$ mit Energie ϵ_L
 $|R\rangle$ " " " ϵ_R .

Ohne Tunneln:

$$\hat{A} = \epsilon_L |L\rangle\langle L| + \epsilon_R |R\rangle\langle R|$$

In Matrix-Schreibweise als Qudit:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_L & 0 \\ 0 & \epsilon_R \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{C}^2$$

$$|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Tunneloperator

$$\hat{V} = T_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_c \in \mathbb{R}$$

Addieren:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_L & T_c \\ T_c & \epsilon_R \end{pmatrix}$$

ist die
Hamiltonian.

1.5 Zeitentwicklung in der QM

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

zeitabhängiger Kets $\in \mathcal{H}$