

9. Nov. 07

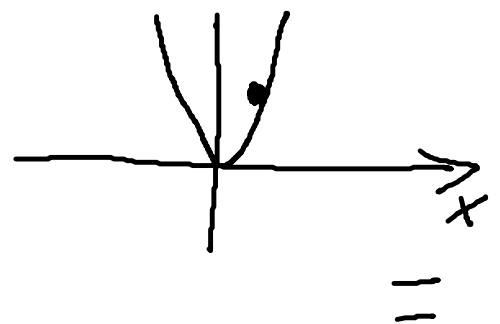
9. 11. 07

III Einteilchen-Quantenmechanik

III 1. Der Harmonische Oszillator (1d)

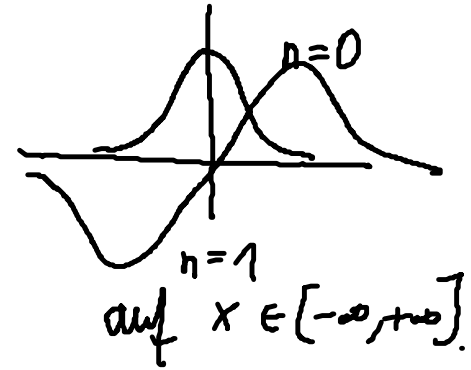
$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$



$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} H_n \left(x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$



$H_n(x)$: Hermite-Polynome

3.1.1. Die Leiter-Operatoren

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \equiv \hat{a} \quad \text{Absteige-Op.}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \equiv \hat{a}^\dagger \quad \text{Aufsteige-Operator}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \equiv \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \quad (\text{ÜA})$$

Def: $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ " $x^2 + p^2 = (x-ip)(x+ip)$ "

Besetzungsanzahl operator.

$$\hat{N}^\dagger = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{N}$$

$\Rightarrow \hat{N}$ hermitisch, deshalb reelle Eigenwerte

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle, \quad n \in \mathbb{R}$$

Schritt 1: n ist positiv oder Null, $n \geq 0$

Definiere $a|n\rangle \equiv |\phi\rangle$

Dann $0 \leq \langle \phi | \phi \rangle = \|a|n\rangle\|^2 =$

$$= \langle n | \underbrace{a^\dagger}_N a |n\rangle = \langle n | \hat{N} |n\rangle = n \underbrace{\langle n | n \rangle}_1 = n$$

$$\Rightarrow n \geq 0$$

Schritt 2: "Leiter hinuntersteigen"

$|n\rangle$ EV von \hat{N} mit EW $n \Rightarrow$

$a|n\rangle$ ist EV von \hat{N} mit EW $n-1$.

$\hat{N} a|n\rangle$ muß berechnet werden.

$$\begin{aligned} \hat{N} a &= \underbrace{a^\dagger}_N a a = \underbrace{(a a^\dagger - (a a^\dagger - a^\dagger a))}_N a \\ &= \underbrace{(a a^\dagger - 1)}_{\dots} a = a (\hat{N} - 1) \end{aligned}$$

$\underbrace{a a^\dagger - (a a^\dagger - a^\dagger a)}_{\equiv [a, a^\dagger] = 1}$

$$\Rightarrow \hat{N} a|n\rangle = a \underbrace{(\hat{N}-1)|n\rangle}_{(n-1)|n\rangle} = a(n-1)|n\rangle$$

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$\Rightarrow a|n\rangle$ ist Eigenzustand von \hat{N}
mit EW $n-1$: $\hat{N}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$

$$\Rightarrow a|n\rangle = c_n |n-1\rangle, \quad c_n \text{ Konstante}$$

$$\Rightarrow n = \langle n | \underbrace{\hat{N}}_{\hat{N}} a|n\rangle = \langle n-1 | c_n^* c_n |n-1\rangle = |c_n|^2 \underbrace{\langle n-1 | n-1\rangle}_1$$

$$\Rightarrow \| |c_n| = \sqrt{n} \|$$

c_n ist bis auf eine Phase

$e^{i\varphi_n}$ eindeutig bestimmt.

Wird als $e^{i\varphi_n} = 1$ gewählt

$$\Rightarrow \boxed{a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle}$$

13>		}	hw
12>		E ₂	
11>		E ₁	
10>		E ₀	

Schritt 3: n ist ganze :

Im weiter absteigen

Sei $0 < n < 1$. Dann

$$\hat{N} a|n\rangle = \underbrace{(n-1)}_{\text{negativ}} a|n\rangle \quad \text{geht nur}$$

falls $a|n\rangle = 0$ (Null-Vektor)

Andersseits $\|a|n\rangle\| = \sqrt{n} > 0$

\Rightarrow Fall $0 < n < 1$ führt zu einem Widerspruch

Deshalb muß n eine ganze Zahl sein.

Das kleinstmögliche n ist $n=0$.

Dafür dann $a|n=0\rangle = 0$.

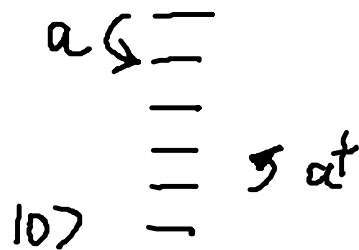
Def: $|0\rangle$ mit $a|0\rangle = 0$ heißt Grundzustand.

Hier alle $|n\rangle$ normiert.

Schritt 4: $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

(AUFGABE)

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$



Beliebiger Zustand $|n\rangle$

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

III. 1.2. Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ = \hbar \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{H} |n\rangle = \hbar \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ = \underbrace{\hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)}_{E_n} |n\rangle \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

E_0 : „Nullpunktsenergie“ $|0\rangle$ Grundzustand

$$|n\rangle \Leftrightarrow \Psi_n(x)$$

III. 1.3 Phononen + Photonen

$|n\rangle \longleftrightarrow n$ -Phononen-Zustand

Leitoperatoren a^\dagger : Erzeuger (Erzeugungsoperator)
creation operator

|| a : Vernichter (Vernichtungsoperator)
annihilation operator

Analog für Photonen:
bei der Quantisierung des
elektromagn. Feldes.

III, 1.4 Kohärente Zustände

Haben die a^\dagger und a Eigenzustände?

Vermutlich:

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathbb{C}$$

$|z\rangle$ heißt kohärenter Zustand
(Glauber-Zustand)

R. Glauber 2005
Nobelpreis.

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

$|n\rangle$ heißen Fock-Zustände.

Anwendung von a :
$$a|z\rangle = \sum_n c_n \underbrace{a|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle}$$

$$\Rightarrow c_n$$

|| AUFGABE

$$\Rightarrow |z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Eigenzustände von $a^\dagger |z\rangle = z |z\rangle$

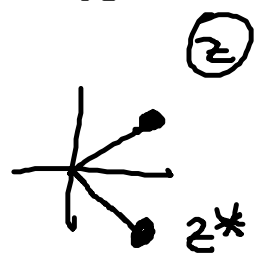
~~?~~
+ Funktioniert nicht!
(AUFGABE)
 $|z\rangle$ ist rechter EV
von a

$$a|z\rangle = z|z\rangle$$

$$\langle z|a^\dagger = z^* \langle z|$$

$\langle z|$ ist linker EV
von a^\dagger

$$\langle z| = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n|$$



$$z^* \equiv \bar{z} = x - iy \text{ für}$$

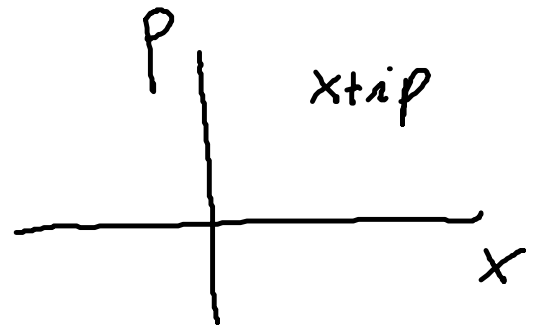
$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Nachrechnen

z.B. Skalarprodukte:

$$\langle z|a|z\rangle = \langle z|z|z\rangle = z \overbrace{\langle z|z\rangle}^1 = z$$

$$\langle z | a^\dagger | z \rangle = z^*$$
~~$$\langle z | z \rangle = z^*$$~~



$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

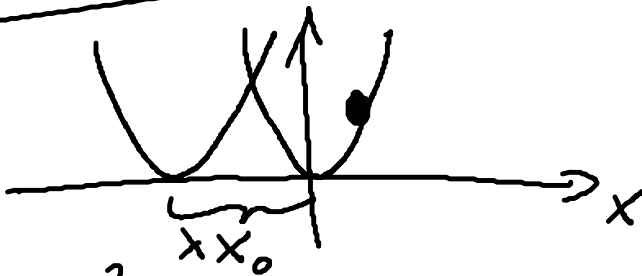
$$\Delta_{|\psi\rangle}^2(\hat{A}) \equiv \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2$$

$$\Delta_{|z\rangle}^2(x) \Delta_{|z\rangle}^2(p) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{4}$$

Heisenberg (AUFGABE)

gleichheitszeichen, falls
 $|\psi\rangle = |z\rangle$

III. 1.5 Verschiebener harmonischer Oszillator



$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \rightarrow \mathcal{H}_\lambda = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x + \lambda x_0)^2$$

$$x_0 \equiv \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
H_\lambda &= H + m\omega^2 \lambda x_0 \underline{x} + \frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 x_0^2 \\
&= H + \hbar\lambda\omega_0 (a + a^\dagger) + \hbar\omega_0 \lambda^2 \\
&= \hbar\omega_0 \left((a^\dagger + \lambda)(a + \lambda) + \frac{1}{2} \right) \\
&= \hbar\omega_0 \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$b \equiv a + \lambda$$

verschobene
Leiternoperatoren

$$b^\dagger = a^\dagger + \lambda^* = a^\dagger + \lambda$$

$$H_\lambda |n\rangle_\lambda = E_n |n\rangle_\lambda, \quad E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

denn $[b, b^\dagger] = 1$.

Grundzustand $|n=0\rangle_\lambda$ definiert als

$$b |0\rangle_\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + \lambda) |0\rangle_\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow a |0\rangle_\lambda = -\lambda |0\rangle_\lambda$$

ist EW-Gleichung $a|z\rangle = z|z\rangle$

mit $z = -\lambda$, $|z = -\lambda\rangle = |0\rangle_\lambda$

Grundzustand des verschobenen Oszillators

ist kohärenter Zustand

in der Basis des

unverschobenen Oszillators!

