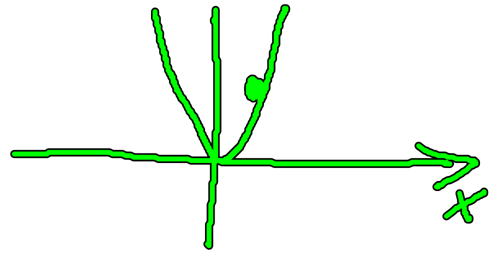
9. Nov. 07

9.11.07

III Einteilchen-Quantenmechanik

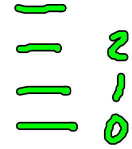
III 1. Der Harmonische Oszillator (1d)

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

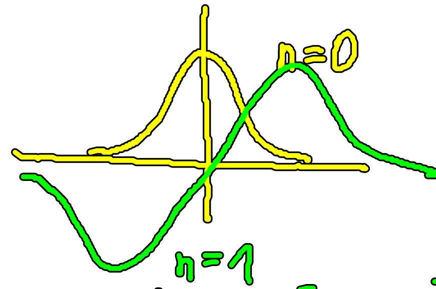


$$H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n}}\, H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$



$H_n(x)$: Hermite-Polynome auf $x \in [-\infty, +\infty]$.

3.1.1. Die Leiter-Operatoren

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \equiv \hat{a} \quad \text{Absteige-Op.}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \equiv \hat{a}^\dagger \quad \text{Aufsteige-Operator}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \equiv aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (\text{ÜA})$$

Def: $\hat{N} \equiv a^\dagger a$, „$x^2 + p^2 = (x-ip)(x+ip)$"

Besetzungszahloperator. $a^\dagger a$

- $\hat{N}^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = \hat{N}$

$\Rightarrow$ $\hat{N}$ hermitsch, deshalb reelle Eigenwerte

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n \in \mathbb{R}$$

<u>Schritt 1:</u> n ist positiv oder Null, $n \geq 0$

Definiere $a|n\rangle \equiv |\phi\rangle$

Dann $0 \leq \langle\phi|\phi\rangle = \| a|n\rangle \|^2 =$

$$= \langle n|\underbrace{a^+ a}_{\hat{N}}|n\rangle = \langle n|\hat{N}|n\rangle = n \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} = n$$

$$\Rightarrow n \geq 0$$

<u>Schritt 2:</u> „Leiter hinuntersteigen"

$|n\rangle$ EV von $\hat{N}$ mit EW n $\Rightarrow$

$a|n\rangle$ ist EV von $\hat{N}$ mit EW $n-1$.

$\hat{N}\, a|n\rangle$ muß berechnet werden.

$$\hat{N} a = a^+ a a = \left(aa^+ - \underbrace{(aa^+ - a^+a)}_{=[a,a^+]=1}\right) a$$

$$= (aa^+ - 1)\,a = a(\hat{N} - 1)$$

$$\Rightarrow \quad \hat N a|n\rangle = a\underbrace{(\hat N - 1)|n\rangle}_{(n-1)|n\rangle} = a(n-1)|n\rangle = (n-1)\, a|n\rangle$$

$$\hat N |n\rangle = n|n\rangle$$

$\Rightarrow$ $a|n\rangle$ ist Eigenzustand von $\hat N$ mit EW $n-1$: $\hat N|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$

$$\Rightarrow \quad a|n\rangle = c_n |n-1\rangle \,, \quad c_n \text{ Konstante}$$

$$\Rightarrow \quad n = \langle n|\underbrace{a^\dagger a}_{\hat N}|n\rangle = \langle n-1|c_n^* c_n|n-1\rangle$$

$$= |c_n|^2 \underbrace{\langle n-1|n-1\rangle}_{1}$$

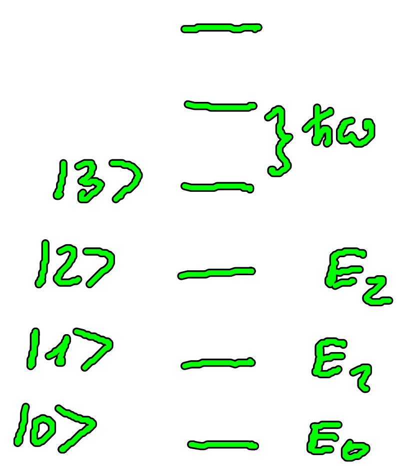
$$\Rightarrow \quad \| \; |c_n| = \sqrt{n} \; \|$$

c_n ist bis auf eine Phase

$e^{i\varphi_n}$ eindeutig bestimmt.

Wird also $e^{i\varphi_n} = 1$ gewählt

$$\Rightarrow \quad \boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$



Schritt 3: n ist ganz :

Im weiter absteigen

Sei $0 < n < 1$. Dann

$$\hat{N}\, a|n\rangle = \underbrace{(n-1)}_{\text{negativ}}\, a|n\rangle$$ geht nur ↯

falls $a|n\rangle = 0$ (Null-Vektor)

Andererseits $\quad \| a|n\rangle \| = \sqrt{n} > 0$

$\Rightarrow$ Fall $0 < n < 1$ führt zu einem Widerspruch

Deshalb muß n eine ganze Zahl sein.

Das kleinstmögliche n ist $n = 0$.

Dafür dann $a|n=0\rangle = 0$.

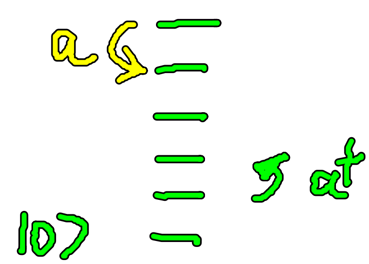
<u>Def</u>: $\quad |0\rangle$ mit $a|0\rangle = 0$

heißt Grundzustand.

Hier alle $|n\rangle$ normiert.

<u>Schritt 4</u>: $\quad a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

(AUFGABE) $\quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$



$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Beliebiger Zustand } |n\rangle} \\ \\ |n\rangle = \dfrac{(a^{+})^{n}}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\end{array}}$$

III .1.2. Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$$
$$= \underbrace{\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}_{E_n}|n\rangle \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

E_0 : „Nullpunktsenergie" $\quad |0\rangle$ Grundzustand

$$|n\rangle \Longleftrightarrow \psi_n(x)$$

III. 1.3 Phononen + Photonen

$|n\rangle \longleftrightarrow$ n-Phononen-Zustand

Leiteroperatoren $\quad a^+$: Erzeuger (Erzeugungs-Operator) creation operator

" $\quad a$: Vernichter (Vernichtungs-Operator) annihilation operator

Analog für Photonen:
bei der Quantisierung des elektromagn. Felder.

III. 1.4 Kohärente Zustände

Haben die a^+ und a Eigenzustände?

Vernichter:

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathbb{C}$$

$|z\rangle$ heißt kohärenter Zustand
(Glauber-Zustand) R. Glauber 2005 Nobelpreis.

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

$|n\rangle$ heißen Fock-Zustände.

Anwendung von a: $a|z\rangle = \sum_n c_n \underbrace{a|n\rangle}_{\sqrt{n}\,|n-1\rangle}$

$\Longrightarrow \quad c_n$

AUFGABE

$$\Longrightarrow \quad |z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Eigenzustände von $\cancel{a^\dagger|\xi\rangle \overset{?}{=} \xi|\xi\rangle}$

Funktioniert nicht!

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \Big\|^{\dagger}$$

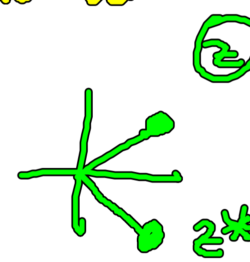
(AUFGABE)

$$\langle z|a^\dagger = z^*\langle z|$$

$|z\rangle$ ist <u>rechter</u> EV von a

$\langle z|$ ist linker EV von $a^\dagger$

$$\langle z| = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n|$$



$z^* = \overline{z} = x - iy$ für

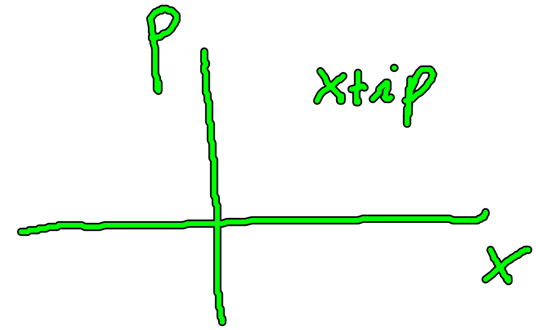
$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

z.B. Skalarprodukte:

Nachrechnen

$$\langle z|\underbrace{a|z\rangle} = \langle z|z|z\rangle = z\overbrace{\langle z|z\rangle}^{1} = z$$

$$\underbrace{\langle z | a^\dagger}_{\langle z | z^*} | z \rangle = z^*$$



$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right)$$

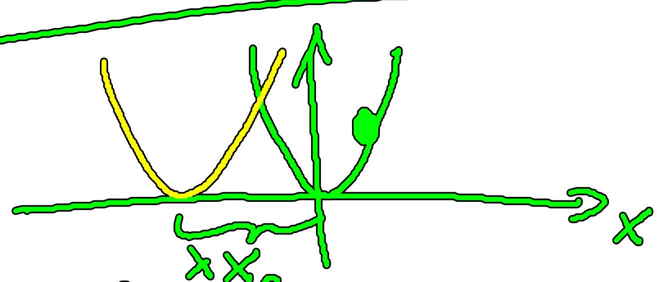
$$\Delta^2_{|\psi\rangle}(\hat{A}) \equiv \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2$$

$$\Delta^2_{|z\rangle}(x)\,\Delta^2_{|z\rangle}(p) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Heisenberg (AUFGABE)

Gleichheitszeichen, falls $|\psi\rangle = |z\rangle$

III.1.5 Verschobener harmonischer Oszillator



$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \longrightarrow \mathcal{H}_\lambda \equiv \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x + \lambda x_0\right)^2$$

$$x_0 \equiv \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$H_\lambda = H + m\omega^2 \lambda x_0 \underline{x} + \frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 x_0^2$$

$$= H + \hbar\lambda\omega_0 (a + a^+) + \hbar\omega_0 \lambda^2$$

$$= \hbar\omega_0 \left((a^+ + \lambda)(a + \lambda) + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \hbar\omega_0 \left(b^+ b + \frac{1}{2} \right)$$

$$b = a + \lambda$$

$$b^+ = a^+ + \lambda^* = a^+ + \lambda$$

verschobene Leiteroperatoren

$$H_\lambda |n\rangle_\lambda = E_n |n\rangle_\lambda \,, \quad E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

denn $[b, b^+] = 1$.

Grundzustand $|n=0\rangle_\lambda$ definiert als

$$b|0\rangle_\lambda = 0$$

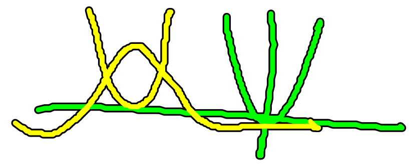
$$\Leftrightarrow \quad (a + \lambda)|0\rangle_\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a|0\rangle_\lambda = -\lambda |0\rangle_\lambda$$

ist EW-Gleichung $a|z\rangle = z|z\rangle$

mit $z = -\lambda$, $\boxed{|z=-\lambda\rangle = |0\rangle_\lambda}$

Grundzustand des verschobenen Oszillator



ist kohärenter Zustand
in der Basis des
unverschobenen Oszillators!