Mittelwerte (Erwartungswert) einer Zufallsvariablen x

$$\langle x \rangle := \int d^d x \, \rho(x) \, x$$

bel. Funktionen $\varphi(x)$

$$\langle \varphi \rangle = \int d^d x \, \rho(x) \, \varphi(x)$$

geeigneter Funktionen

NB: Der Mittelwert ist ein lineares Funktional $f: L \to \mathbb{R}$, $\varphi \to \langle \varphi \rangle$

Es gilt $\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi_2 \rangle$

Unkorrelierte Zufallsvariablen:

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1) \rho_2(x_2)$

Dann gilt $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$

Beweis: $\int dx_1 dx_2 \, \rho(x_1, x_2) \, x_1 x_2 = \int dx_1 \rho_1(x_1) x_1 \int dx_2 \rho_2(x_2) x_2$

Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsverteilung und Mittelwerten:

ν-tes **Moment** der Wahrscheinlichkeitsvert.: $M_\nu := \langle x^\nu \rangle$

Momentenerzeugende: $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M_\nu$$

Durch die Angabe *aller* Momente ist die Wahrsch.verteilung festgelegt!

Verallgemeinerung auf d Zufallsvariable:

$$M_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle$$

Moment der Ordnung $\nu := \nu_1 + \nu_2 + \dots \nu_d$

Momentenerzeugende: $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle$

$$= \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} M_{\nu_1 \dots \nu_d}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_d)$

$x = (x_1, \dots x_d)$

<u>Kumulante</u> $C_{\nu_1 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle_c$

ist definiert durch die

Kumulantenerzeugende $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle$

$$\left(\frac{\partial^{\nu_1} \dots \partial^{\nu_d}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots x_d^{\nu_d}} \Gamma(\alpha) \right|_{\alpha = 0} = C_{\nu_1 \dots \nu_d}$$

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} C_{\nu_1 \dots \nu_d}$$

Eigenschaft:

- Kumulanten sind additiv für unkorrelierte Zufallsvariable. (gilt nicht für Momente!!)

Beweis: Seien x_1, x_2 unkorreliert $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$
$\underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\alpha) = \langle e^{\underline{\alpha}\,\underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2\, \rho(x_1)\rho(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$
$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

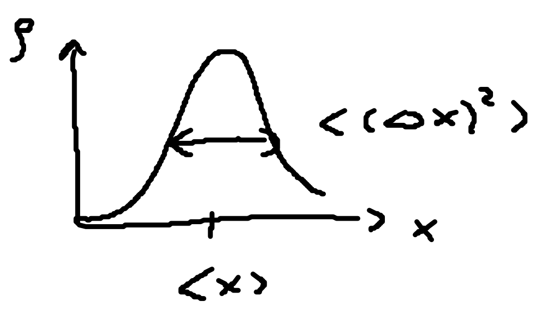
$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle}_{\Gamma(\alpha_1)} + \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle}_{\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\Rightarrow \quad \langle (x_1 + x_2)^\nu \rangle_c = \langle x_1^\nu \rangle_c + \langle x_2^\nu \rangle_c$$

Fluktuation $\quad \Delta x := x - \langle x \rangle$

Es gilt: $\langle \Delta x \rangle = 0$

<u>Varianz</u>: $\quad \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$
$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$



(Maß für die Breite einer Verteilung)

ii) Zusammenhang zwischen Kumulanten und Momenten:

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$$
$$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$$

$$\langle x^4 \rangle_c = \langle (\Delta x)^4 \rangle - 3 \left(\langle (\Delta x)^2 \rangle \right)^2$$

Gaußverteilung (Normalverteilung):

$$\rho(x) = A \exp\left(- \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$\sigma^2 := \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_c$

σ Standardabweichung

Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x) = A \sigma \sqrt{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2}}_{\sqrt{\pi}} = 1$$

$u := \frac{x}{\sigma \sqrt{2}}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Gaußverteilung $$\rho(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, x\, dx = x_0$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x)\, (x - x_0)^2 = \sigma^2$$

$$z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x)\, e^{\alpha x}$$

$$-\infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} + \alpha x}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{-x^2 - 2x(x_0+\sigma^2\alpha) + (x_0+\sigma^2\alpha)^2}{2\sigma^2} \cdots}$$

$$\cdots \frac{-2x_0\sigma^2\alpha}{}$$

$$Z(\alpha) = e^{x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2}$$

$$\langle x \rangle = \left.\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = (x_0 + \sigma^2\alpha)\, e^{x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = x_0$$

$$\langle x^2 \rangle = \left.\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \left[\sigma^2 + (x_0+\sigma^2\alpha)^2\right] e^{x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \sigma^2 + x_0^2$$

$$\Gamma(\alpha) = \ln Z(\alpha) = x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2$$

$$\langle x \rangle_c = \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha}\right|_0 = x_0$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \left.\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\alpha^2}\right|_0 = \sigma^2$$

$$\langle x^\nu \rangle_c = 0 \quad \text{für } \nu > 2$$

1.2 Informationsmaße

Die Informationstheorie (Shannon 1916 - 2001, Wiener 1894 - 1964) enstand im 2. Weltkrieg im Zusammenhang mit Entschlüsselung codierter Nachrichten

Def.: Ein <u>Maß</u> μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Abb.: $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$ für disjunkte Ereignisse A_i

(d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$)

(NB: Eine σ Algebra ist eine Algebra $\mathcal{A}$ mit Eigenschaft abzählbar viele $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, \dots \infty)$ $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$)

Im folgenden sei die Ereignisalge stets eine σ-Algebra

Beispiel eines Maßes: Wahrscheinlichkeit P

Idee des Informationsmaßes: Vergleich verschiedener Wahrsch. verteilungen über einer Ereignisalgebra $\mathcal{A}$

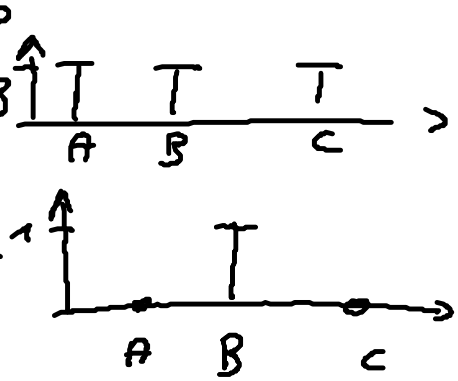
Frage: Welche von 2 Verteilungen enthält mehr Information (Kenntnis) darüber, welches Ereignis eintreten wird?

Beispiel:

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\in \mathcal{A}$

1. Verteilung — Gleichverteilung (minimale Kenntnis)

2. Verteilung — scharfe Verteilung (maximale Kenntnis = Sicherheit)



Bitzahl

Ausgangspunkt: diskrete Ereignisalgebra $\mathcal{A} = \{A_i\}$

Frage: Wie lang muss eine Nachricht sein, die einem Beobachter mitteilt, dass <u>ein</u> Ereignis eingetreten ist?

Länge der Nachricht = Maß für die fehlende Kenntnis eines Beobachters

Beispiel: Auswahl eines Ereignisses aus $\mathcal{A} = \{A_1, A_2 \dots A_N\}$ falls Beobachter keine Vorkenntnis hat.

(i) $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$: einfache Alternative

= kleinste Informationseinheit

= 1 bit (binary digit) 1942

Nachricht: 0 oder 1

(ii) A = Menge mit $N = 2^n$ Elemente

n Alternativentscheidungen

Nachricht z.B.: $\underbrace{0011}_{}$

n Stellen in Binärdarstellung

Länge der Nachricht: $n = \log_2 N$ (Bitzahl)