5.4 Das Photonengas im Strahlungshohlraum

Betrachte el. magn. Strahlung in einem ladungs- und stromfreien Hohlraum im thermischen Gleichgewicht:

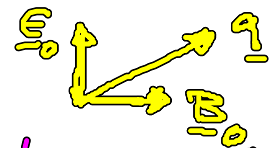
$$\left.\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r},t) &= \underline{E}_0\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega(q)t)}\\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \underline{B}_0\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r} - \omega(q)t)}\end{aligned}\right\}$$

ebene Wellen als Lös. der Maxwellgln.

mit $\underline{E}_0 \cdot \underline{B}_0 = 0$

$$\underline{q}\cdot\underline{E}_0 = \underline{q}\cdot\underline{B}_0 = 0$$

$$\omega(q) = c|\underline{q}|$$



transversale Welle

Quantisierung des el. magn. Feldes:

harmon. Oszillatoren der Frequenz $\omega(q)$

$\Longrightarrow E_q = \hbar\omega(q)\left(n_q + \frac{1}{2}\right)$, $n_q = 0, 1, 2, \ldots$

Interpretation von n_q als Zahl der Schwingungsquanten oder Photonen mit Energie $\hbar\omega(q)$

und Impuls $\hbar\underline{q}$

Photonen sind Bosonen (da $n_q = 0, 1, 2, \ldots$)

mit Spin $S = 1$

Aber: Entartung nur 2 (2 Spinzustände)

$\hat{=}$ 2 Polarisationsrichtungen

(linkszirkular u. rechtszirkular)

$\underline{S} \uparrow\downarrow \underline{q}$ $\qquad$ $\underline{S} \uparrow\uparrow \underline{q}$

Die 3. Einstellmöglichkeit des Spins tritt nicht auf (keine „longitudinalen" Photonen)

Lichtgeschw. c, Ruhmasse $m_0 = 0$

Therm. Gleichgewicht des Photonengases mit den Wänden (Hohlraumstrahlung)

$\longrightarrow$ Photonen emittiert / absorbiert

$\longrightarrow$ keine unabh. Bed. zur Teilchenzahl

$\boxed{\mu = 0}$ kanon. Ensemble

$$\bar{N} = 2 \sum_{\underline{q}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(q)}{kT}\right\} - 1} = 2 \sum_{\underline{q}} \langle N_q \rangle$$

$$U = 2 \sum_{\underline{q}} \frac{\hbar\omega(q)}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(q)}{kT}\right\} - 1}$$

2 Polaris. richt.

Übergang zum Quasi-Kontinuum $\quad \omega = cq$

$$2 \sum_{\underline{q}} \longrightarrow \frac{2V}{h^3} \int d^3\hbar q = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq\, q^2 = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty d\omega\, \omega^2$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^\infty d\nu\, \nu^2 \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$\Rightarrow$ Zustandsdichte der Photonen $\mathcal{D}(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2$

$$\bar{N} = \int_0^\infty d\nu\, \mathcal{D}(\nu) \langle N_\nu \rangle$$

$$U = \int_0^\infty d\nu\, \mathcal{D}(\nu)\, h\nu \langle N_\nu \rangle$$

spektrale Energiedichte der Strahlung:

$$\boxed{u(\nu,T) := \frac{1}{V}\,D(\nu)\,h\nu\,\langle N_\nu\rangle = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

Planck'sche Strahlungsformel

Grenzfälle: $h\nu \ll kT$: $u(\nu,T) \approx \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{h\nu/kT} = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT$

Rayleigh-Jeans-Gesetz

(klass. Resultat, $\nu \to 0$)

$h\nu \gg kT$: $u(\nu,T) \sim \nu^3 e^{-a\frac{\nu}{T}}$

W. Wien, empirisch für $\nu \to \infty$ für irdische Lichtquellen, versagt für Sonne, Fixsterne

Planck'sche Ableitung der Strahlungsformel (1900)

Postulat: Strahlungsenergie gequantelt $E_n = n\,h\nu$ in Zustandssumme

$\rightarrow$ Erklärung der Strahlung schwarzer Körper, Interpolation zwischen Rayleigh-Jeans u. Wien

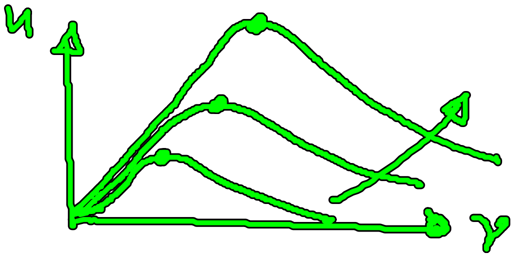
$\Rightarrow$ histor. Ausgangspkt. der Quantentheorie

(14. 12. 1900)

Max. der spektralen Energiedichte für $h\nu \gg kT$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \sim \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu^3 e^{-a\frac{\nu}{T}}\right) = \left(3 - a\frac{\nu}{T}\right)\nu^2 e^{-a\frac{\nu}{T}} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \boxed{\nu_{max} \sim T}$ Wien'sches Verschiebungsgesetz



Gesamtenergie :

$$U(T) = V \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty d\nu \, \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} = V \frac{8\pi}{(ch)^3} (kT)^4 \underbrace{\int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{e^x - 1}}_{\pi^4/15}$$

$$\boxed{U(T) = V \frac{8\pi^5}{15(ch)^3} (kT)^4}$$ Stefan-Boltzmann

Wärmekapazität : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \sim T^3$

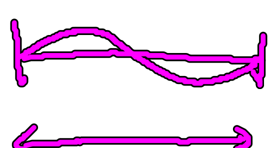
Strahlungsdruck : $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ folgt mit der kanon. Zustandssumme Z

$$F = -kT \ln Z = kT \sum_\nu \ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

$$p = kT \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln Z\right)_T = -kT \sum_\nu \frac{\frac{h}{kT}\left(\frac{\partial \nu}{\partial V}\right) e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-h\nu/kT}}$$

V-Änderung $\Rightarrow$ Frequenzänderung ν

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \sim V^{-1/3}$$



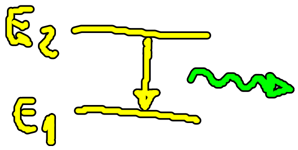
$V^{1/3}$

$$\frac{\partial \nu}{\partial V} = -\frac{1}{3} \frac{\nu}{V}$$

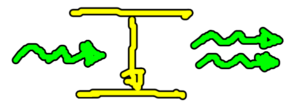
$$p = \frac{1}{3V} \sum_\nu \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-h\nu/kT}} = \frac{1}{3V} \sum_\nu h\nu \langle N_\nu \rangle$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\frac{U}{V}}$$ Strahlungsdruck

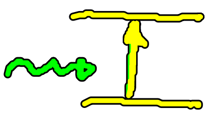
Einstein'sche Ableitung der Planck'schen Strahlungsformel
(1917)



spont. Em.



induz. Em. (stimul.)



Abs.

Im therm. Gleichgewicht gilt für die mittl. Bes.zahlen der elektron. Atomniveaus (~~Fermionen~~)

$$\frac{\langle N_2\rangle}{\langle N_1\rangle} = \frac{g_2 p(E_2)}{g_1 p(E_1)} = \frac{g_2}{g_1}\frac{e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta \underbrace{(E_2 - E_1)}_{h\nu}}$$

$$p_i = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$$

Therm. Gl. $\longrightarrow$ Raten = Zahl der Übergänge pro Zeit u. Vol.

(i) Abs. $E_1 \to E_2$: $B_{12}\, u(\nu,T) \langle N_1\rangle$ = Rate

(ii) spont. Em. $E_2 \to E_1$: $A_{21}\langle N_2\rangle$

(iii) erzwung. Em. $E_2 \to E_1$: $B_{21}\, u(\nu,T)\langle N_2\rangle$ neu!

Grundlage für
Maser 1954
Laser 1964

Bilanzgl. (chem. Massenwirk.kin.)
Einsteinkoeff. B_{12}, A_{21}, B_{21}

$$B_{12}\, u(\nu,T)\langle N_1\rangle = A_{21}\langle N_2\rangle + B_{21}\, u(\nu,T)\langle N_2\rangle$$

$$\Rightarrow u(\nu,T) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{\langle N_1\rangle}{\langle N_2\rangle} - B_{21}} = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{g_1}{g_2}e^{\beta h\nu} - B_{21}}$$

<u>Postulate</u>: (i) $\lim_{T\to\infty} u(\nu,T) = \infty \Rightarrow \boxed{B_{12}\frac{g_1}{g_2} = B_{21}}$

$$\Rightarrow u(\nu,T) = \frac{a}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Bose-Einstein-Verteilung

(ii) Für $kT \gg h\nu$ gilt Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{T\to\infty} u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\pi}{c^3}h\nu^3}$$

<u>NB</u>: Verallgem. auf El. systeme im <u>Nichtgleichgew.</u>

$\Rightarrow$ Photonen mit eff. chem. Pot. $\mu \neq 0$

Landsberg, J. Phys. C <u>14</u>, L 1025 (1981)

Schöll & Landsberg, J. Opt. Soc. Am. <u>73</u>, 1197 (1983)

$\rightarrow$ Laserschwelle $\mu = E_2 - E_1$

$\Rightarrow u \to \infty$