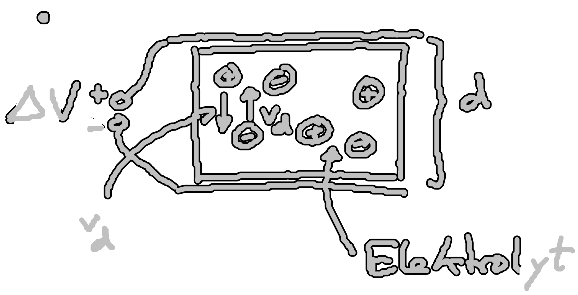
4.4.3 Nernst-Relation $\longleftrightarrow$ Membran-Potentiale



$|\underline{E}| = \frac{\Delta V}{d} \longrightarrow$ elektrophoretischer Fluß

(≙ Elektrolytleitung)

Teilchenstromdichte:

$$\boxed{\underline{j}_e = \underset{\text{Ionen-konzentration}}{c}\ \underset{\text{Drift-geschwindigkeit}}{\underline{v}_d} \overset{(4.13)}{=} \frac{c\overset{\text{Ladung}}{q}}{\underset{\text{Reibungskoeff.}}{\gamma}}\,\underline{E}} \quad (4.29)$$

& inhomogenes c & Einstein: $D = \frac{k_B T}{\gamma}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\underline{j} = \underline{j}_D + \underline{j}_e = D\left(-\underline{\nabla} + \frac{q}{k_B T}\underline{E}\right)c} \quad (4.30)$$

... Nernst-Planck-Formel

• Gleichgewicht: $\underline{j} = \underline{0}$ ... $\underline{E}$

$$\underbrace{\frac{1}{c}\,\underline{\nabla} c}_{\underline{\nabla}(\ln c)} = \frac{q}{k_B T}\,\underline{E} \quad \Big| \underbrace{\int_1^2 \cdot\, d\underline{s}}_{\text{Linienintegral}}$$

Linienintegral:

$\Delta V_{eq} = -\int \underline{E}\cdot d\underline{s} =$ .. Potentialdifferenz

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = -\frac{q}{k_B T}\,\Delta V_{eq}} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

1D: $c_2 = c_{\text{oben}}$, $c_1 = c_{\text{unten}}$

<u>Bem.</u>: (i) (4.31) gültig für kleine c ≙ Ww zwischen Ionen ist vernachlässigbar

(ii) ⊕ näher bei neg. Elektr.
⊖ " " pos. "

(iii) $e^{(4.31)} \longrightarrow$

$$\boxed{\frac{c_2}{c_1} = e^{-\frac{q \Delta V_{eq}}{k_B T}}} \quad (4.32)$$

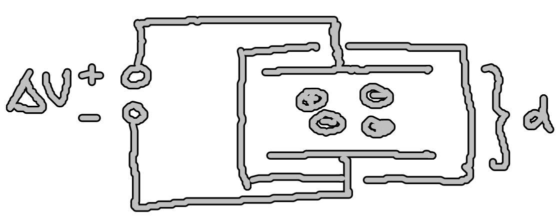
... Boltzmann-Faktor !!
kontrolliert GG-Verteilung
(kein D, da dynam. Größe!)

(iv) <u>Bsp</u>: Na^+: $q = e > 0$, $\frac{c_{oben}}{c_{unten}} = 0.1$, $\boxed{k_B T_r = \frac{1}{40} eV}$!!

$$\longrightarrow \boxed{\Delta V_{eq} = 62\,mV}$$ ≙ Membran-Potentiale (aber: im Nicht-GG)

4.4.4 Elektr. Widerstand ⟷ Dissipation

• Elektrolyt-Zelle:



$$\boxed{\begin{aligned} j_L &= q j_e \overset{(4.23)}{=} \mathcal{G} \underline{E} \\ \mathcal{G} &= \frac{c q^2}{\zeta} = \frac{D q^2 c}{k_B T} \end{aligned}} \quad (4.33)$$

... Leitfähigkeit

1D: $\Delta V = E d$

Strom: $I_{ion} = j_L A$ ... Fläche

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V &= R\, I_{ion} \\ R &= \frac{1}{\mathcal{G}} \frac{d}{A} \end{aligned}} \quad (4.34)$$

... Ohmsches Gesetz für jede Ionensorte

... elektr. Widerstand

• Merke: Erhaltungsgröße & Diffusion $\longrightarrow$ dissipatives Transport-gesetz

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Teilchendiffusion:} & \underline{j} = -D\underline{\nabla} c \\ (\text{Ladungstransport:} & \underline{j}_e = -\sigma \underline{\nabla} V = \sigma \underline{E}) \\ \text{Wärmetransport:} & \underline{j}_Q = -\varkappa \underline{\nabla} T \end{array}} \quad (4.35)$$

Wärmeleitfähigkeit

5. Hydrodynamik in der Nanowelt

• Bio-Frage: Warum bewegen sich Bakterien anders fort als Fische?

Physikal. Idee: Reibung dominiert in der Nanowelt

5.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

• zentrale Grundgleichung für Geschw.feld $\underline{v}(\underline{x},t)$ einer viskosen Newtonschen isotropen Flüssigkeit

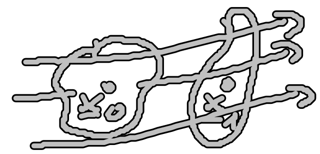
5.1.1. Grundgleichung

• Beschränkung: inkompressible Flüssigkeit: $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ (5.1)

Herleitung: Massenerhaltung differentiell: für Flüssigkeitsdichte $\rho(\underline{x},t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\underbrace{\rho \underline{v}}_{\text{Massenstromdichte}}) = 0 \qquad (5.2)$$

mit $$\underbrace{\frac{d\rho(\underline{x},t)}{dt}}_{\text{totale, materielle Zeitableitung}} = \frac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} + \underbrace{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho(\underline{x},t)}_{\text{konvektive Zeitableitung}} \qquad (5.3)$$



$$(5.2) \xrightarrow[\text{div}(\rho\underline{v}) = \rho\,\text{div}\,\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho]{} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\text{div}\,\underline{v} = 0 \qquad (5.3)$$

inkompressibel: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \longrightarrow (5.1)$

- Navier-Stokes-Gl.: (5.4)

$$\underbrace{\rho\underbrace{\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)}_{\frac{d\underline{v}}{dt}}}_{\text{Trägheit}} = -\underline{\nabla}\underbrace{p}_{\text{Druck}} + \underbrace{\eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}}_{\text{Reibung!}} + \underbrace{\rho\,\underline{b}}_{\text{Volumenkraftdichte}}$$

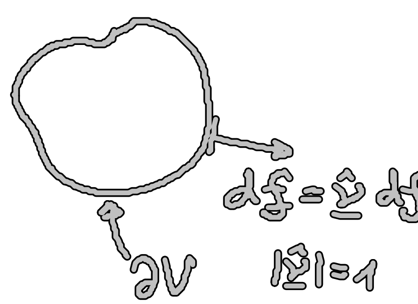
η ... Scherviskosität

Bsp: $\underline{b} = \underline{g}$ ... Gravitation, elektr./magn. Ww

- Umschreibung: Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$, in Komp. T_{ij}

$\longrightarrow$ Oberflächenkraft auf Flüssigkeitsvolumen:

$$\boxed{F_{O\,i} = \int_{\partial V} T_{ij}\, df_j \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V (\nabla_j T_{ij})\, d^3x = \int_V (\text{div}\,\underline{\underline{T}})_i\, d^3x} \qquad (5.5)$$



o.B. $\boxed{T_{ij} = \underbrace{-p\,\delta_{ij}}_{(1)} + \underbrace{2\eta A_{ij}}_{(2)}}$ (5.6)

(1) $F_0 = -\int p\, d\underline{f}$, $p\, d\underline{f} \parallel d\underline{f}$! ... keine Schubspannungen ($\perp d\underline{f}$)

$= -\int \underline{\nabla} p \, d^3x$

$\nabla_j(p\,\delta_{ij}) = \nabla_i p$

(2) <u>Newtonsche Flüssigkeit:</u>

dissipativer Anteil von $T_{ij} \sim A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ (5.7)

... Scherrate

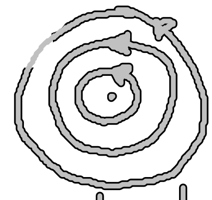
(i) $2\eta A_{ij}$ ... für isotrope Flüssigkeiten $= A_{ji}$!

(mehr Terme für komplexe, anisotrope Flüssigk.)

(ii) $W_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)$ $[\nabla_i v_j = A_{ij} + W_{ij}]$

$\longrightarrow \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk}$ (5.8)

$\longrightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}$



Vortex!
kein Beitrag zur Dissipation!!

mit $\nabla_j(T_{ij}) \overset{(5.7)}{\underset{(5.6)}{=}} \eta\nabla_j(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \underset{\nabla_j v_j}{=} \eta\, \underline{\nabla}^2 v_i$

$= \operatorname{div} v = 0$

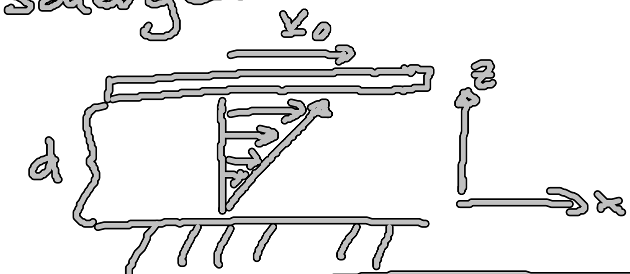
$$\Longrightarrow \boxed{\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \rho \underline{b}} \qquad (5.9)$$

... Navier-Stokes-Gl.

• $\underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}$ ... Nichtlinearität! $\longrightarrow$ Chaos, Turbulenz

5.1.2. Stationäre Lösungen

• Schergeometrie:



$$\left.\begin{array}{l} \underline{b} = 0 \\ p = p_0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\frac{\partial v}{\partial t} = 0]{(5.4)} \boxed{\begin{aligned} \underline{v} &= v(z)\, \underline{e}_x \\ &= v_0 \frac{z}{d}\, \underline{e}_x \end{aligned}} \qquad (5.10)$$

$$\longrightarrow \boxed{T_{xz} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d}} \qquad (5.11)$$

$\longrightarrow$ Messe η