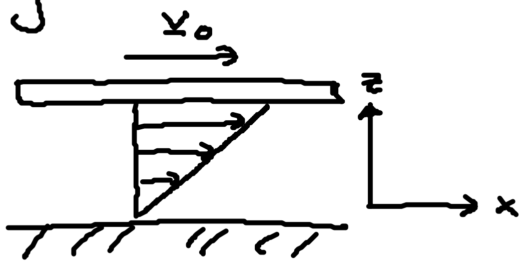
- Navier-Stokes-Gl.

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)}_{\frac{d\underline{v}}{dt}} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + \rho \underline{b} \qquad (5.4)$$

5.1.2. Stationäre Lösungen

- Schergeometrie:

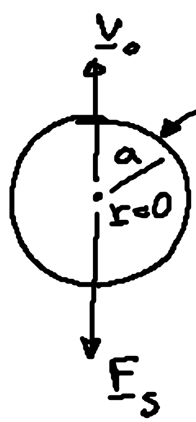


$$\Longrightarrow \quad \underline{v} = v(z)\,\underline{e}_x = v_0 \frac{z}{d}\,\underline{e}_x$$

$$\Longrightarrow \quad T_{xz} = T_{zx} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d} \qquad (5.11)$$

- Stokessche Reibung: (1) Translation: $\longrightarrow$ Einstein: N_A
$\longrightarrow$ Millikan: e

$\underline{v}(\infty) = 0$
$p(\infty) = 0$



$\underline{v}(\underline{r}_K) = \underline{v}_0$
..."vollständige Haftung"

(1) $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$

(2) $\underline{b} = 0$

(3) Annahme:
$\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \ll -\nabla p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_i(\underline{r}) &= \left[\frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1 - 3\frac{r_i r_j}{r^2}\right)\right] v_{0j} \\ p(\underline{r}) &= \frac{3}{2}\eta \frac{a}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{v}_0 \end{aligned}} \qquad (5.12)$$

$\Longrightarrow$ Stokessche Reibungskraft auf Kugel:

$$\boxed{\underline{F}_s = \int_{\partial V_K} \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = -6\pi\eta a \underline{v}_0} \quad (5.13)$$

$\longrightarrow$ Messe η!

(2) Rotation:

$\underline{v}(\infty) = 0$

$\underline{v}(\underline{r}_K) = \underline{\omega} \times \underline{r}_K$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{v} &= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\omega} \times \underline{r} \\ p &= ? \end{aligned}} \quad (5.14)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\underline{T} = \int \underline{r}_K \times \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = -8\pi\eta a^3 \underline{\omega}} \quad (5.15)$$

... viskoses Drehmoment

5.1.3 Laminar $\longleftrightarrow$ turbulenter Fluß

- zähe Flüssigkeiten sind schwer zu mischen

[Fig: 5.1/5.2]

Beobachtung: (1) Fluß stoppt sofort bei $\underline{F}, \underline{T} = 0$ $\longrightarrow$ Trägheit unwichtig

(2) $\left.\begin{aligned} \underline{T} &\longrightarrow -\underline{T} \\ \underline{F} &\longrightarrow -\underline{F} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$ Ausgangszustand

(3) Reibung, Dissipation $\longleftrightarrow$ Reversibilität? (2. HS ↯ ?)

nein: Zeitskala:

Diffusion $\gg$ Fluß

(4) laminarer Fluß (Trägheit $\ll$ Reibung)

Flüssigkeitsschichten gleiten aneinander vorbei

Turbulenz (Trägheit >> Reibung):
"wenig viskose Flüssigk."
Kaffeetasse
kompl. Strömungsmuster

$\longrightarrow$ Kriterien? Dimensionsanalyse?

5.1.4. Kritische Kraft

- isotrope, inkompressible, Newtonsche Flüssigkeit: η, ρ
- Was heißt zäh/viskos? $\eta \left[\frac{kg}{m\,s}\right]$, $\rho \left[\frac{kg}{m^3}\right]$ } keine einheitenlose Zahl $\longrightarrow$ kein intrinsisches Maß für Viskosität

aber: kritische viskose Kraft:

$$\boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}} \qquad (5.16)$$

- äußere Kraft F:

$$\boxed{\frac{F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, & \text{laminarer, viskoser Fluß} \\ \gg 1, & \text{Turbulenz} \end{cases}} \qquad (5.17)$$

- Beispiele: Tabelle 5.1

H_2O: $F < 1\,nN \longrightarrow$ zähe Flüssigkeit in Nanowelt

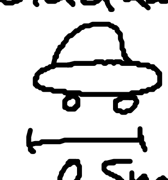
Zelle: $F \approx 1\,pN \longrightarrow$ Reibung ist wichtig

- keine intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)

$\longrightarrow$ NS-Gln. sind skaleninvariant

$\hat{=}$ Physik ist auf allen Skalen die gleiche

$\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip: Auto $\longleftrightarrow$ Windkanal



5.1.5 Reynoldszahl

• NS: $$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla}p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} + \eta\,\underline{b} \qquad (5.4)$$

mit a … charakt. Länge

v_0 … " Geschw.

⟶ Skalierung auf einheitenlose Größen:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{x} &\longrightarrow \tilde{\underline{x}} = \underline{x}/a \\
\underline{v} &\longrightarrow \tilde{\underline{v}} = \underline{v}/v_0 \\
t &\longrightarrow \tilde{t} = t/\tfrac{a}{v_0} \\
p &\longrightarrow \tilde{p} = p/\tfrac{\eta v_0}{a} \\
\underline{b} &\longrightarrow \tilde{\underline{b}} = \underline{b}/\tfrac{v_0^2}{a}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

$$\longrightarrow \boxed{Re\left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\underline{v}}\cdot\tilde{\underline{\nabla}}\,\tilde{\underline{v}}\right) = -\tilde{\underline{\nabla}}\tilde{p} + \tilde{\underline{\nabla}}^2\tilde{\underline{v}} + Re\,\tilde{\underline{b}}} \qquad (5.19)$$

$$\boxed{\text{Reynoldszahl } Re = \rho\frac{a v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}}} = \frac{\rho\frac{v_0^2}{a}}{\eta\frac{v_0}{a^2}} \qquad (5.20)$$

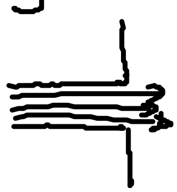
⟶ **Ähnlichkeitsprinzip:** Systeme mit gleichem Re verhalten sich gleich ($\tilde{\underline{b}} = 0$)

• $Re < 1$: … laminar, schleichender Fluß; Reibung dominiert

$(\rho\,\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \ll \eta\,\nabla^2\underline{v})$

$Re > 1$: … Turbulenz, Trägheit dominiert

• Übergang zur Turbulenz, real:



$Re = 3$

⋮

$Re = 1000$

- $Re \leftrightarrow F_{krit}$: konsistent?

$Re < 1$: $\dfrac{F_s \sim \eta a v_0}{F_{krit} \sim \frac{\eta^2}{\rho}} = Re$ $\qquad$ $Re > 1$: $\dfrac{F_t \sim \rho \frac{v^2}{a} a^3}{F_{krit} \sim \frac{\eta^2}{\rho}} = Re^2$

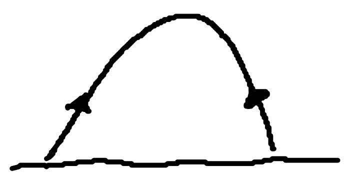
- Bsp: 30 m Wal, $v_0 = 10 \frac{m}{s}$ $\longrightarrow$ $Re \approx 3 \cdot 10^8$

$1 \mu m$ Bakterie, $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s}$ $\xrightarrow[\text{in } H_2O]{}$ $Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$

5.1.6 Zeitumkehr $\longleftrightarrow$ Dissipation

- Newton: $\dfrac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{x})$ $\qquad$ $\underline{x}(t)$ Lsg $\rightarrow$ $\underline{x}(-t)$ Lsg

$\hat{=}$ Zeitumkehrinvarianz!



- NS-Gln.: Reibungsterm: $\eta \nabla^2 \underline{v} \longrightarrow -\eta \nabla^2 \underline{v}$ ... zerstört Zeitumkehrinvarianz

$\longleftrightarrow$ Irreversibilität

$\longleftrightarrow$ Dissipation

- laminarer Fluß: $Re \ll 1$: $\qquad 0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{b}$

$\underline{v}(-t)$ Lsg. falls: $\left.\begin{array}{l} \nabla p \rightarrow -\nabla p \\ \underline{b}(t) \rightarrow -\underline{b}(-t) \end{array}\right\}$ vgl. 5.1.3

- weitere Bsp: (1) $\dfrac{\partial c}{\partial t} - D \nabla^2 c = 0$, $c(\underline{x}, -t)$ keine Lösung

(2) elastischer Festkörper: $\quad \underline{u}$ ... Verschiebungsfeld

$$\rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} = \underset{\text{Schermodul}}{\mu} \nabla^2 \underline{u} + \underbrace{(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u}}_{\text{Kompression}}$$

... Zeitumkehrinvarianz

(3) allg: Viskoelastizität: Bsp. Blut