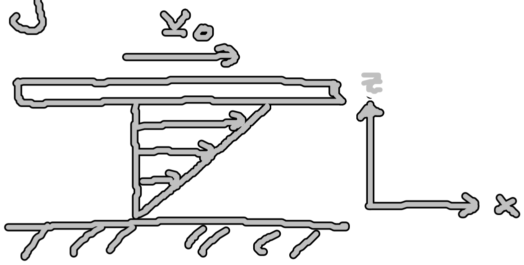
- Navier-Stokes-Gl.

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)}_{\rho\frac{d\underline{v}}{dt}} = -\underline{\nabla} p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} + \rho\,\underline{b} \qquad (5.4)$$

5.1.2. Stationäre Lösungen

- Schergeometrie:

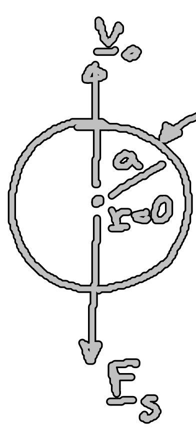


$$\Longrightarrow \quad \underline{v} = v(z)\,\underline{e}_x = v_0\frac{z}{d}\,\underline{e}_x$$

$$\Longrightarrow \quad T_{xz} = T_{zx} = \eta\frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta\frac{v_0}{d} \qquad (5.11)$$

- Stokessche Reibung: (1) Translation: $\longrightarrow$ Einstein: N_A
$\longrightarrow$ Millikan: e

$\underline{v}(\infty)=0$
$p(\infty)=0$



$\underline{v}(\underline{r}_K) = \underline{v}_0$ ... "vollständige Haftung"

(1) $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$

(2) $\underline{b} = 0$

(3) Annahme:
$\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \ll -\nabla p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}$

$\overset{\text{o.B.}}{\Longrightarrow}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_i(\underline{r}) &= \left[\frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1 - 3\frac{r_i r_j}{r^2}\right)\right] v_{0j} \\ p(\underline{r}) &= \frac{3}{2}\eta\frac{a}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{v}_0 \end{aligned}} \qquad (5.12)$$

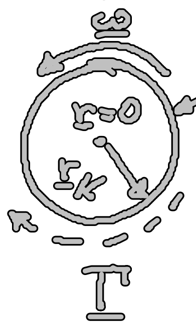
$\Longrightarrow$ Stokessche Reibungskraft auf Kugel:

$$\boxed{\underline{F}_S = \int_{\partial V_K} \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = -6\pi\eta a \underline{v}_0} \quad (5.13)$$

$\longrightarrow$ Messe η!

(2) Rotation:

$\underline{v}(\infty) = 0$



$\underline{v}(\underline{r}_K) = \underline{\omega} \times \underline{r}_K$

$\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{v} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\omega} \times \underline{r} \\ p = ? \end{array}} \quad (5.14)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\underline{\Gamma} = \int \underline{r}_K \times \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = -8\pi\eta a^3 \underline{\omega}} \quad (5.15)$$

... viskoses Drehmoment

5.1.3 Laminar $\longleftrightarrow$ turbulenter Fluß

- zähe Flüssigkeiten sind schwer zu mischen

[Fig: 5.1/5.2]

Beobachtung: (1) Fluß stoppt sofort bei $\underline{F}, \underline{T} = 0$ $\longrightarrow$ Trägheit unwichtig

(2) $\left.\begin{array}{l} \underline{T} \longrightarrow -\underline{T} \\ \underline{E} \longrightarrow -\underline{E} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Ausgangszustand

(3) Reibung, Dissipation $\longleftrightarrow$ Reversibilität? (2. HS ↯ ?)

nein: Zeitskala:

Diffusion $\gg$ Fluß

(4) laminarer Fluß (Trägheit $\ll$ Reibung)

Flüssigkeitsschichten gleiten aneinander vorbei

Turbulenz (Trägheit $\gg$ Reibung):
"wenig viskose Flüssigk."
Kaffeetasse
kompl. Strömungsmuster

$\longrightarrow$ Kriterien? Dimensionsanalyse?

5.1.4. Kritische Kraft

- isotrope, inkompressible, Newtonsche Flüssigkeit: η, ρ
- Was heißt zäh/viskos? $\left.\begin{array}{l} \eta \left[\frac{kg}{m\,s}\right] \\ \rho \left[\frac{kg}{m^3}\right] \end{array}\right\}$ keine einheitenlose Zahl $\longrightarrow$ kein intrinsisches Maß für Viskosität

aber: kritische viskose Kraft: $$\boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}} \quad (5.16)$$

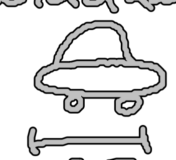
- äußere Kraft F:

$$\boxed{\frac{F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, & \text{laminarer, viskoser Fluß} \\ \gg 1, & \text{Turbulenz} \end{cases}} \quad (5.17)$$

- Beispiele: Tabelle 5.1

H_2O: $F < 1\,nN$ $\longrightarrow$ zähe Flüssigkeit in Nanowelt
Zellen: $F \approx 1\,pN$ $\longrightarrow$ Reibung ist wichtig

- keine intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)
  $\longrightarrow$ NS-Gln. sind skaleninvariant
  $\hat{=}$ Physik ist auf allen Skalen die gleiche
  $\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip: Auto $\longleftrightarrow$ Windkanal



0,5m

5.1.5 Reynoldszahl

• NS: $$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} + \eta\, \underline{b} \qquad (5.4)$$

mit a ... charakt. Länge

v_0 ... " Geschw.

→ Skalierung auf einheitenlose Größen:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{x} &\longrightarrow \tilde{\underline{x}} = \underline{x}/a \\
\underline{v} &\longrightarrow \tilde{\underline{v}} = \underline{v}/v_0 \\
t &\longrightarrow \tilde{t} = t\Big/\frac{a}{v_0} \\
p &\longrightarrow \tilde{p} = p\Big/\frac{\eta v_0}{a} \\
\underline{b} &\longrightarrow \tilde{\underline{b}} = \underline{b}\Big/\frac{v_0^2}{a}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

→ $$\boxed{Re\left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\underline{v}}\cdot\tilde{\underline{\nabla}}\,\tilde{\underline{v}}\right) = -\tilde{\underline{\nabla}}\tilde{p} + \tilde{\underline{\nabla}}^2 \tilde{\underline{v}} + Re\, \tilde{\underline{b}}} \qquad (5.19)$$

$$\boxed{\text{Reynoldszahl } Re = \frac{\rho\, a\, v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}}} = \frac{\rho \frac{v_0^2}{a}}{\eta \frac{v_0}{a^2}} \qquad (5.20)$$

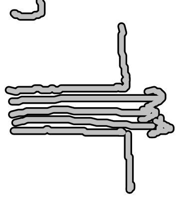
→ **Ähnlichkeitsprinzip:** Systeme mit gleichen Re verhalten sich gleich ($\tilde{\underline{b}}=0$)

• $Re < 1$: ... laminar, schleichender Fluß; Reibung dominiert

($\rho\, \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \ll \eta\, \nabla^2 \underline{v}$)

$Re > 1$: ... Turbulenz, Trägheit dominiert

• Übergang zur Turbulenz, real:



$Re = 3$

⋮

$\equiv\equiv\Rightarrow$ Re = 1000

- Re $\longleftrightarrow F_{krit}$: konsistent?

Re < 1 : $\dfrac{F_S \sim \eta a v_0}{F_{krit} \sim \frac{\eta^2}{\varrho}} = Re$ Re > 1 : $\dfrac{F_T \sim \varrho \frac{v^2}{a} a^3}{F_{krit} \sim \frac{\eta^2}{\varrho}} = Re^2$

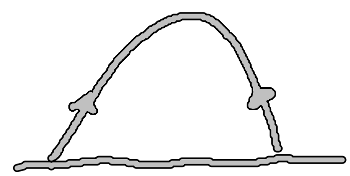
- Bsp: 30 m Wal , $v_0 = 10 \frac{m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^8$

1 μm Bakterie, $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s} \xrightarrow[\text{in } H_2O]{} Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$

5.1.6 Zeitumkehr $\longleftrightarrow$ Dissipation

- Newton: $\dfrac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{x})$ $\underline{x}(t)$ Lsg $\longrightarrow$ $\underline{x}(-t)$ Lsg

$\hat{=}$ Zeitumkehrinvarianz!



- NS-Gln.: Reibungsterm: $\eta \nabla^2 \underline{v} \longrightarrow -\eta \nabla^2 \underline{v}$ ... zerstört Zeitumkehrinvarianz

$\longleftrightarrow$ Irreversibilität

$\longleftrightarrow$ Dissipation

- laminarer Fluß: Re ≪ 1 : $0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + \varrho \underline{b}$

$\underline{v}(-t)$ Lsg. falls: $\left.\begin{aligned} \nabla p &\to -\nabla p \\ \underline{b}(t) &\to -\underline{b}(-t) \end{aligned}\right\}$ vgl. 5.1.3

- weitere Bsp: (1) $\dfrac{\partial c}{\partial t} - D \nabla^2 c = 0$, $c(x,-t)$ keine Lösung

(2) elastischer Festkörper: $\underline{u}$ ... Verschiebungsfeld

$$\varrho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schermodul}}}{\mu} \nabla^2 \underline{u} + \underbrace{(\lambda + \mu)\, \text{grad div}\, \underline{u}}_{\text{Kompression}}$$

... Zeitumkehr invarianz

(3) allg: Viskoelastizität: Bsp. Blut