15.10.2008

$N=2$ Teilchen, Massen m_1, m_2

$$m_1 \ddot{\underline{x}}_1 = -\nabla_1 V(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) \quad / \cdot 1/m_1$$

$$m_2 \ddot{\underline{x}}_2 = -\nabla_2 V(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) \quad / \cdot 1/m_2$$

Schwerpunkt $\quad \underline{R} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 \underline{x}_1 + m_2 \underline{x}_2)$

Relativkoordinate $\quad \underline{r} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2 \; ; \quad \ddot{\underline{r}} = \frac{d^2}{dt^2}\underline{r}$

Subtrahiere:

$$\ddot{\underline{r}} = -\frac{1}{m_1 m_2}\left(m_2 \underline{\nabla}_1 V(r) - m_1 \underline{\nabla}_2 V(r)\right)$$

$$= -\frac{1}{m_1 m_2}\left(m_2 \frac{\underline{r}}{r} V'(r) - m_1 (-1) \frac{\underline{r}}{r} V'(r)\right)$$

$$= -\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \underbrace{\frac{\underline{r}}{r} V'(r)}_{\underline{\nabla}_r V(r)}$$

$$\boxed{\mu \ddot{\underline{r}} = -\underline{\nabla}_r V(r)} \; ; \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad \text{reduzierte Masse}$$

Newtonsche Gleichung eines Teilchens der Masse μ

$$m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \simeq \frac{\cancel{m_1} m_2}{\cancel{m_1}} = m_2$$

Sonne Erde

Zurück zu

$$\underline{x}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\underline{r} \qquad \text{Sonne}$$

$$\underline{x}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\underline{r} \qquad \text{Erde}$$

Schwerpunktsbewegung ist trivial (gleichförmig)

Allgemeine Lösung in $d=3$ Dimensionen

$$\mu \ddot{\underline{r}} = -\nabla_{\underline{r}} V(r)$$

Erhaltungssatz für Drehimpuls $\underline{L} = \underline{R}\times\underline{P} + \mu\, \underline{r}\times\dot{\underline{r}}$

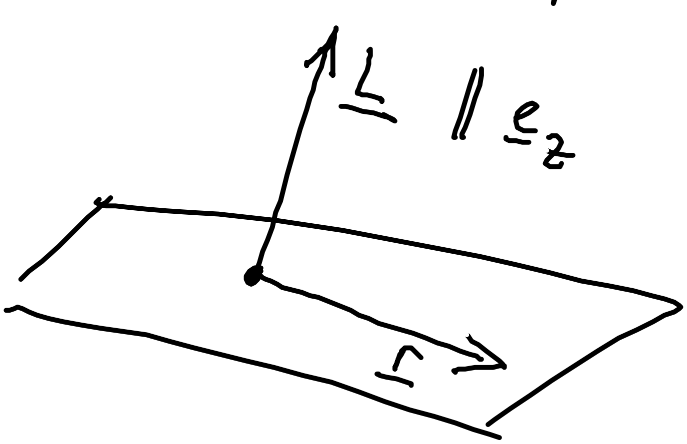
(gesamter ")

(AUFGABE)

Jetzt setzen wir $\underline{R} = 0$,

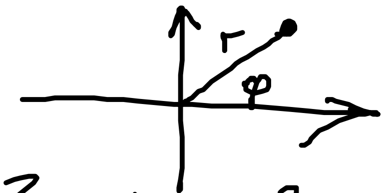
$$\Rightarrow \underline{L} = \mu\, \underline{r}\times\dot{\underline{r}} = \text{const}$$

$\underline{L} \parallel \underline{e}_z$



$\underline{r} \perp \underline{L}$, liegt in der Ebene $\perp$ zum konstanten Drehimpuls

Polarkoordinaten (in der Ebene) $\qquad \underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$



kinetische Energie $\qquad T = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right)$

Setze $\mu = m$.

Drehimpuls: $\qquad \underline{L} = m\, \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = m\, r \underline{e}_r \times r\dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi$

$$= m r^2 \dot{\varphi}\, \underline{e}_z$$

Gesamtenergie: $\qquad E = T + V(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + V(r)$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2 m r^2} + V(r)}_{\equiv V_{eff}(r)}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)}, \quad \dot{r} = \frac{dr(t)}{dt}$$

Trennung der Variablen

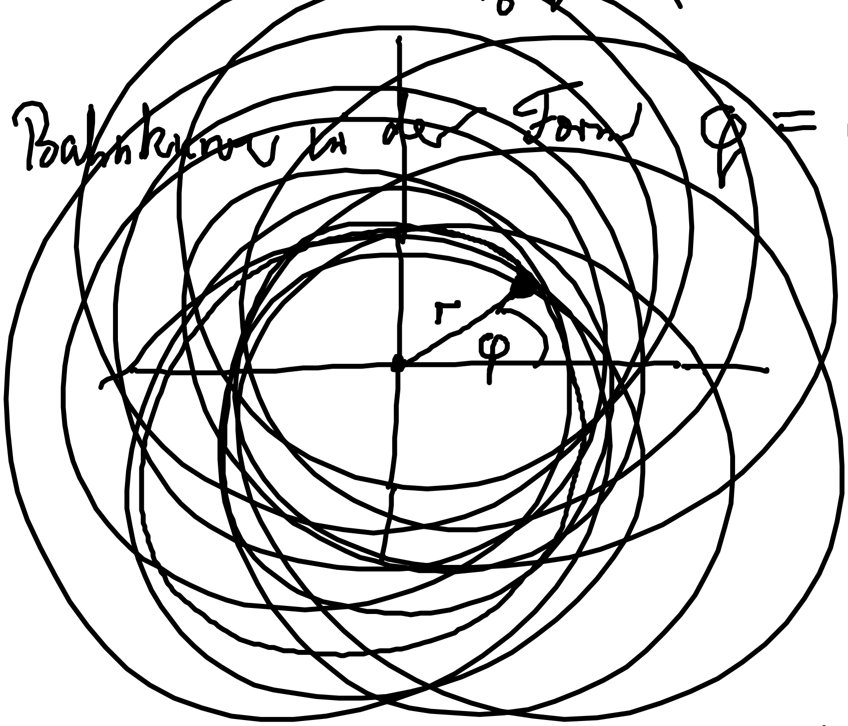
$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

$$= \left[\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{L}{m r^2}\, dt \right]$$

$$dr = \sqrt{}\;\frac{mr^2}{L}\,d\varphi \quad \Big/ \int$$

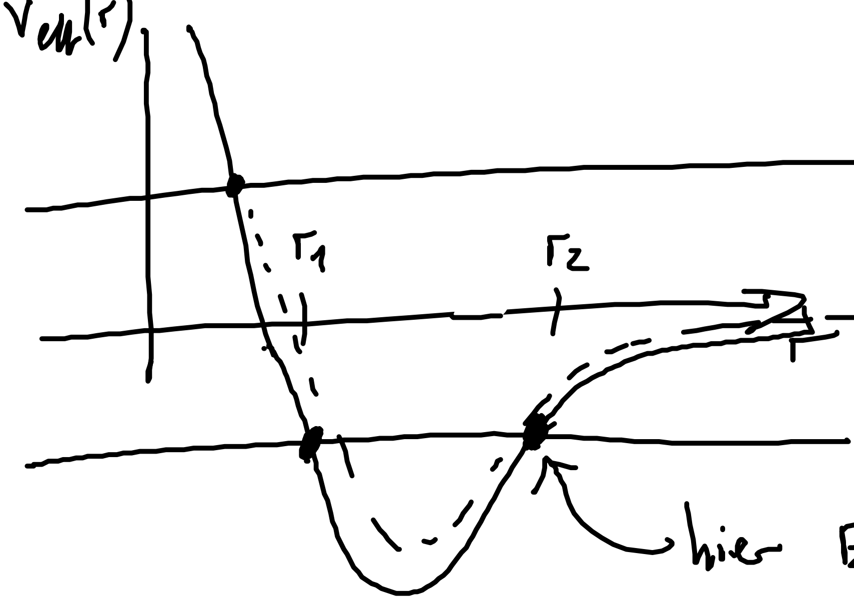
$$\int d\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}\,dr$$

Bahnkurve in der Form $\varphi = \varphi(r)$



abstoßend

Das effektive Potential $V_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$



z.B. $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$

anziehend

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const}$$

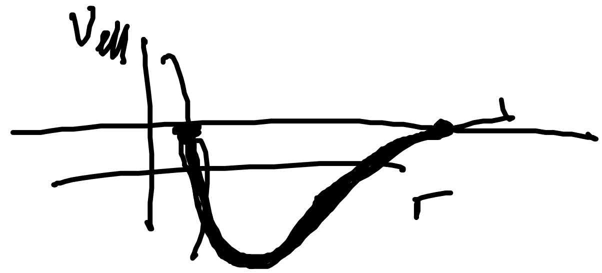
An den Stellen r_1, r_2 gilt $\dot{r} = 0$

verschwindende Radialgeschwindigkeit

Offene und geschlossene Bahnkurven

r ändert sich von r_{min} zu r_{max} zu r_{min} für „gebundene Zustände" (r bleibt beschränkt).

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \frac{L/r^2}{\sqrt{2m[E-V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} .$$



$\Delta\varphi$ rationaler Teil von 2π

$\Rightarrow$ Bahnkurve geschlossen.

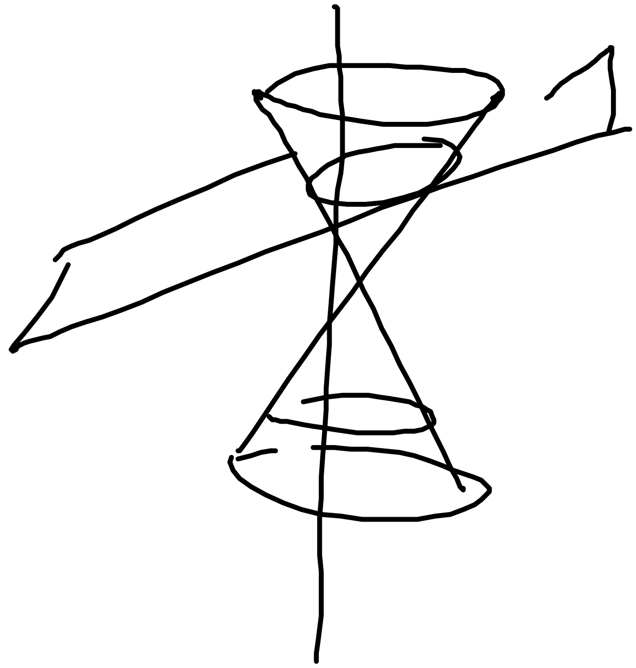
Das ist nur für $V(r) \propto \frac{1}{r}$ und $V(r) \propto r^2$ der Fall („Theorem" von Bertrand)

„GOLDSTEIN".

Landau

Sommerfeld

Kepler-Problem

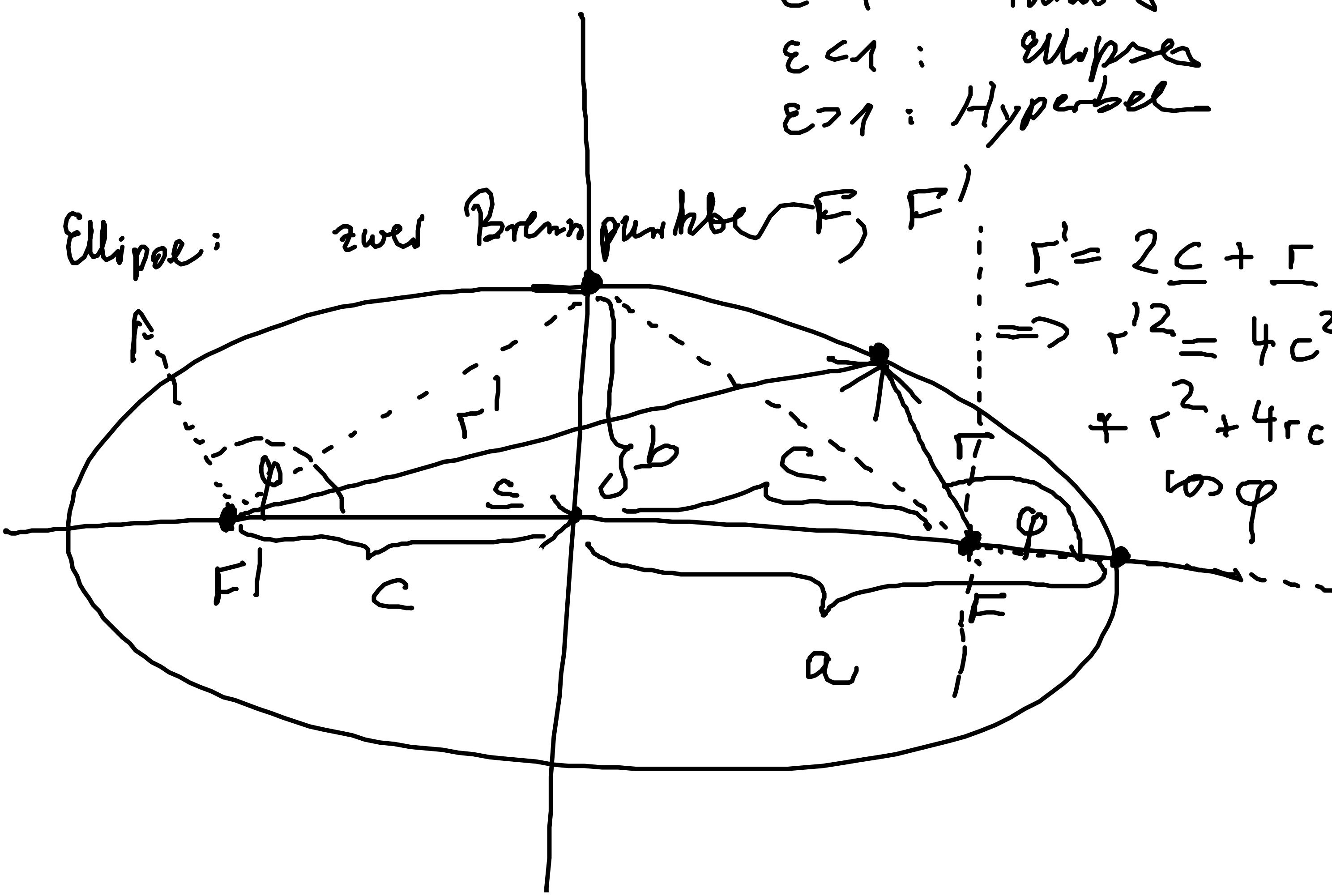


Polardarstellung

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

$\varepsilon = 0$: Kreis
$\varepsilon = 1$: Parabel
$\varepsilon < 1$: Ellipsen
$\varepsilon > 1$: Hyperbel

Ellipse: zwei Brennpunkte F, F'



$\underline{r}' = 2\underline{c} + \underline{r}$

$\Rightarrow r'^2 = 4c^2 + r^2 + 4rc \cos\varphi$

$r + r' = 2a$, a große Halbachse, b kleine Halbachse

〃 $= 2a$, $a^2 = b^2 + c^2$;

$r' = -r + 2a \Rightarrow$
$(2a - r)^2 = 4\varepsilon^2 a^2 + r^2 + 4\varepsilon a r \cos\varphi$

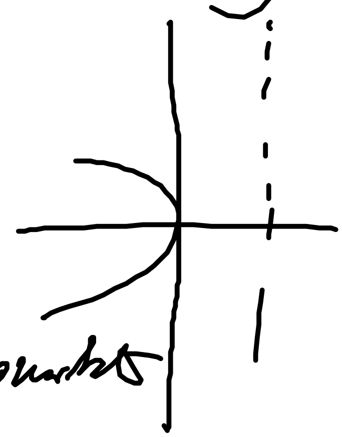
$c = \sqrt{a^2 - b^2} \equiv \varepsilon a$

$\varepsilon < 1$ Exzentrizität

$$\Rightarrow \quad r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \; ; \quad k \equiv a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}$$

Im kartesischen KO (Mittelpunkt der Ellipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2) In gleichen Zeiten überstreicht der "Fahrstrahl" Sonne-Planet "gleiche Flächen" $\Leftrightarrow$ $r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$

AUFGABE

3) Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Bahnen zweier Planeten

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Von Kepler zum $\frac{1}{r}$ - Potential

Newton in PKO. MM

Beschleunigung

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{x}} = & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) \underline{e}_r \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta\right) \underline{e}_\theta \\ & + \left(2r\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right) \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

(AUFGABE!).

Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F_r$$

$$m\left(\underline{2\dot{r}\dot{\varphi}} + r\ddot{\varphi}\right) = F_\varphi$$

Kepler II $\quad \underline{m r^2 \dot{\varphi} \equiv L} = \text{const}$

$$\Rightarrow \quad F_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\varphi}\right) = 0$$

Kepler I $\Rightarrow r = k / 1 + \varepsilon \cos\varphi$

$$m\dot{r} = m \frac{\varepsilon k \dot{\varphi} \sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{\varepsilon}{k} L \sin\varphi$$

$$m\ddot{r} = \frac{\varepsilon}{k} L \dot{\varphi} \cos\varphi = \frac{m}{k} r^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{k}{r} - 1\right)$$

$$= m r \dot{\varphi}^2 - \frac{L^2}{m k r^2} \Rightarrow F_r = -\left(\frac{L^2}{mk}\right)\frac{1}{r^2}$$