21.10.8

21.10.08

Potentialtheorie

Massendichte $\sum_{i=1}^{N} m_i \, \delta^3(\underline{r}-\underline{r}_i)$ am Orte $\underline{r}$

N Massenpunkte m_i bei $\underline{r}_i$

„Deltafunktion":

$$\int dx' \, f(x') \, \delta(x-x') = f(x)$$

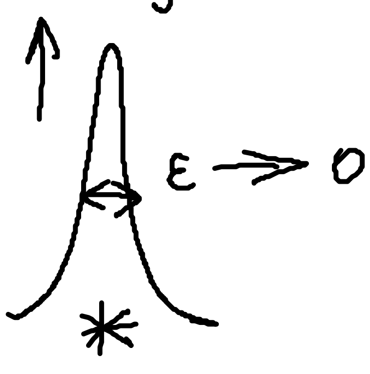
$$\int dx' \, \delta(x-x') = 1$$

Als Grenzwert aus einer „unendlich scharf gepeakten" Gaußverteilung.

Analog in d Dimension, $\underline{r} = (x_1, \dots, x_d)$

$$\delta^{(d)}(\underline{r}) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \ldots \cdot \delta(x_d)$$

$$\int d^d r' \, \delta^d(\underline{r} - \underline{r}') \, f(\underline{r}') = f(\underline{r})$$



$\underline{r} = \underline{r}_i$.

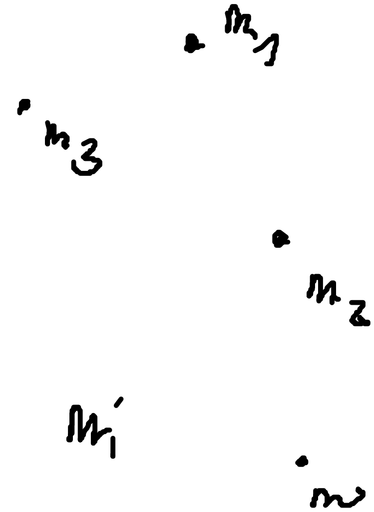
Für die Massendichte $\rho(\underline{r}) \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \, \delta^d(\underline{r}-\underline{r}_i)$

gilt $$\int d^d\underline{r}\, \rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{\int d^d\underline{r}\, \delta^d(\underline{r}-\underline{r}_i)}_{1}$$

$= M$ Gesamtmasse.

Gravitationspotential einer Masse m_i, die am Ort $\underline{r}_i$ sitzt: wirkt auf Testmasse m

$$V(\underline{r}) = - G m \frac{m_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}$$



Entsprechend für N feste Massen m_i

$$\boxed{V(\underline{r})} = -Gm \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} =$$

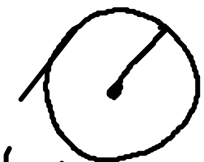
$$= -Gm \int d^3\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(Test): $$= -Gm \int d^3 r' \, \frac{\sum m_i \, \delta^3(r_i - \underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

M

$\rho(r)$

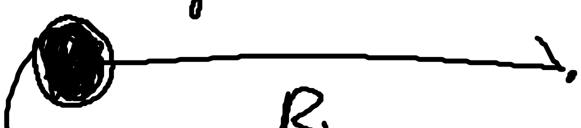
Ellipsoid



$\rho(r)$

m

Kugel

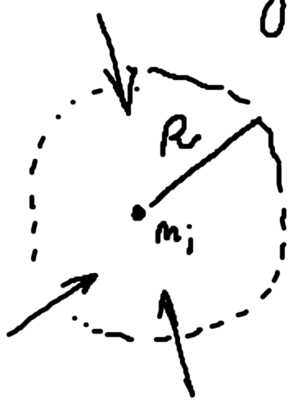


Newtonsche Gravitationsfeld

Testmasse m, feste Masse m_i bei $\underline{r}_i$

$$\underline{F}(\underline{r}) \equiv m\, g_i(\underline{r})\,;\quad g_i(\underline{r}) \equiv -G m_i \frac{\underline{r}-\underline{r}_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3}$$

$g_i(\underline{r})$: Newt. G. feld.



Kugel vom Radius R

Fluß durch die Kugeloberfläche

$$\underbrace{\int d^2\underline{A}\; g_i(\underline{r})}_{\text{Flächenint.}} = -G m_i \frac{1}{R^2}\cdot \underbrace{4\pi R^2}_{\text{Oberfläche}}$$

$$= -G m_i \cdot 4\pi =$$

$$= -G\cdot 4\pi \int dV\, \rho_i(\underline{r})$$

$$\rho_i(\underline{r}) = m_i\, \delta^3(\underline{r})$$

$$-4\pi G \int dV\, \rho_i(\underline{r}) = \int d^2\underline{A}\, g_i(\underline{r}) =$$

Gaußscher Integralsatz

$$= \int dV \, \mathrm{div}\, \underline{g}_i(\underline{r})$$

$$\equiv \int dV \, \underline{\nabla} \cdot \underline{g}_i(\underline{r})$$

$$\mathrm{div}\, \underline{g}_i(\underline{r}) = -4\pi G \rho_i(\underline{r})$$

Gaußsches Gesetz für Newtons Grav.-Feld

Jetzt für N Massenpunkte

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\, \underline{g}(\underline{r}) = -4\pi G \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \rho_i(\underline{r})}_{\rho(\underline{r})}}$$

beliebige Dichte $\rho(\underline{r})$

Anwenden:

Hohlkugel

m_0

Gesamte Masse M

Poisson-Gleichung, Laplace-Operator

$$\mathrm{div}\, \underline{g}(\underline{r}) = -4\pi G \rho(\underline{r})$$

$$\underline{F}(\underline{r}) = m\,\underline{g}(\underline{r}) \equiv -\underline{\nabla}\, V(\underline{r})$$

gradient

$$V(\underline{r}) = -Gm\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Es gilt $\operatorname{div}\underline{F}(\underline{r}) = -\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}}_{\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \Delta} V(\underline{r}) = -4\pi G m \rho(\underline{r})$

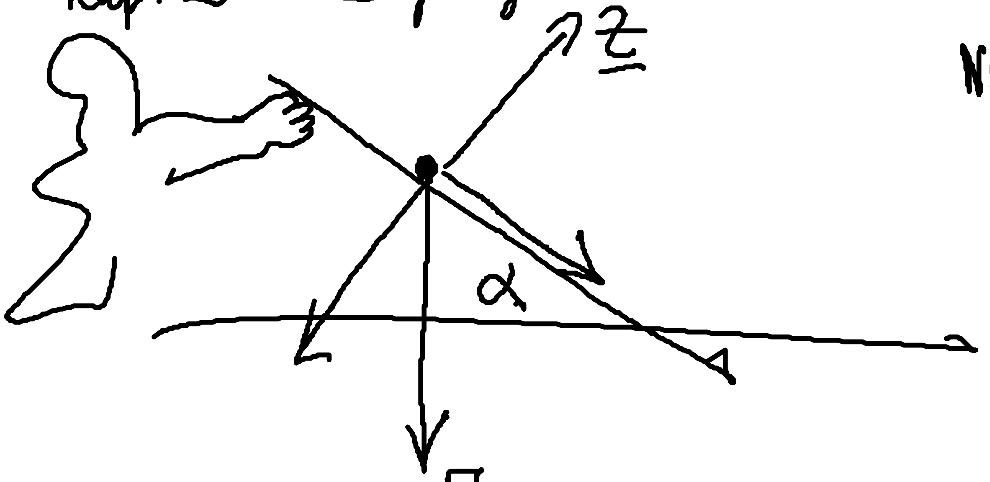
„Laplace-Operator"

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V(\underline{r}) = 4\pi G m\, \rho(\underline{r})}$$

Poisson-Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Kap. 2: Lagrange-Mechanik

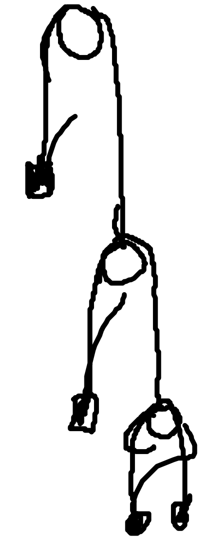


Nebenbedingungen

Atwoodsche Fallmaschine

Zwangskraft $\underline{Z}$

Schwerkraft $\underline{F}$



Teilchen auf Fläche

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z}$$

Fläche sei gegeben durch $g(\underline{r}, t) = 0$

z.B. $z = 0$

holonome Randbedingung (RB).

Zwangskraft $\underline{Z}$ muß senkrecht zur Fläche sein

$$\underline{Z} \parallel \nabla g(\underline{r}, t) \Rightarrow$$

$$\underline{Z}(\underline{r}, t) = \lambda(t) \cdot \underline{\nabla} g(\underline{r}, t)$$

mit einer zu bestimmenden Funktion $\lambda(t)$.

Jetzt K Newtonsche Gleichungen

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + Z_n, \quad n = 1, \dots, K$$

r Nebenbedingungen

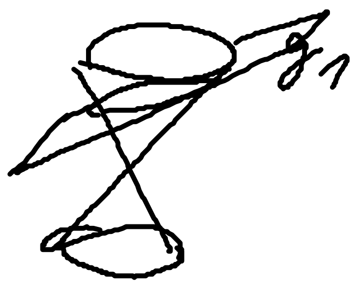
$$g_\alpha(x_1,\dots,x_K,t) = 0\,, \qquad \alpha = 1,\dots,r$$

z.B. für N Punktteilchen in d Dimensionen

$$K = N\cdot d$$

Beispiel in $d=3$:

$$g_1(x,y,z) = z^2 - \alpha^2(x^2+y^2) = 0$$
$$g_2(x,y,z) = z + a + bx + cy = 0$$



Conic section

Notation: $\quad \underline{x} = (x_1,\dots,x_K)$

$$M\ddot{\underline{x}} = \underline{F} + \underline{Z}$$
$$g_\alpha(\underline{x},t) = 0 \qquad g_\alpha \text{ skalare Fkt.}$$

Jede der r Zwangsbed. schränkt die Bewegung auf $K-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit.

$$\underline{Z} = \sum_\alpha \underline{Z}_\alpha\,; \quad \underline{Z}_\alpha = \lambda_\alpha(t)\nabla g_\alpha(\underline{r},t).$$

Annahme: Zwangsbedingungen voneinander unabhängig

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}} = \underline{F} + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha(t)\nabla g_\alpha \qquad K \text{ Gleichungen}}$$

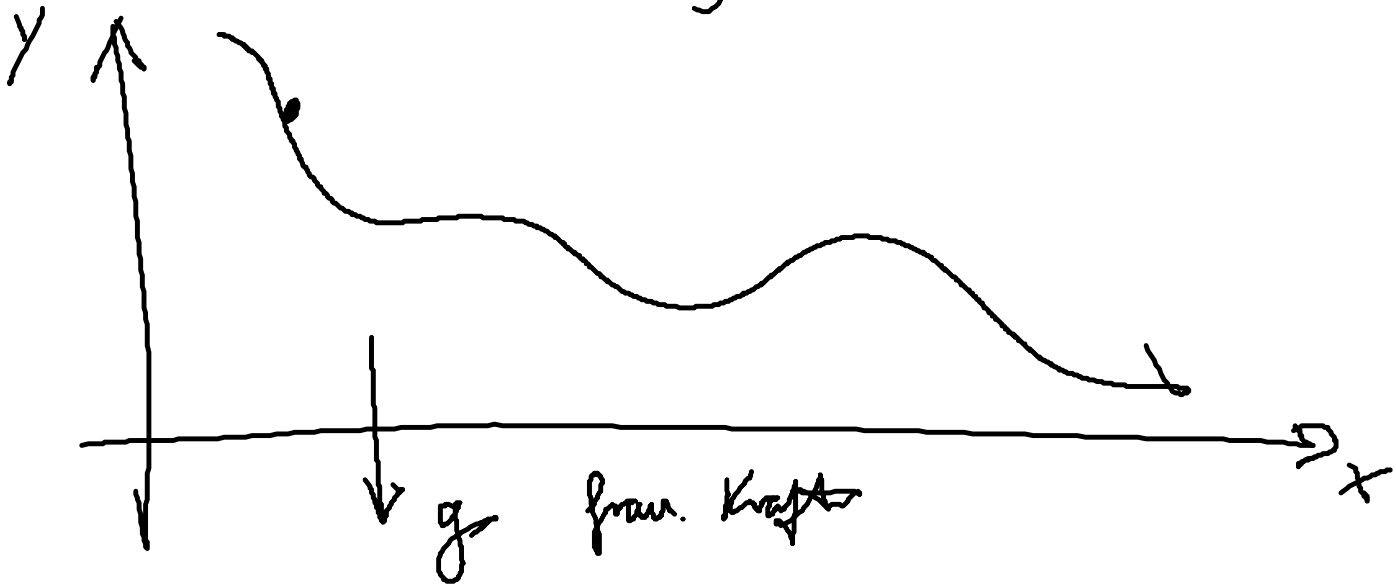
$g_\alpha(\underline{x},t) = 0 \qquad \alpha = 1,\dots,r$

Insgesamt $K+r$ Gleichungen für

die $x_n(t), \lambda_\alpha(t)$: $K+r$ Funktionen

Symmetrische Matrix der Massen (AUFGABE)

Beispiel: Teilchen auf einer Kurve $y = f(x)$ in $d=2$ Dimensionen



1 Zwangsbedingung

$$g_1(x,y) = y - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Z} = \lambda(t)\,\underline{\nabla} g_1 = \lambda(t)\,\big(-f'(x), 1\big)$$

Schwerkraft $\underline{F} = (0, -mg)$ $\qquad g = 9.8\ m/s^2$

Jetzt Gleichungen für $\ddot{x} = \ldots$

$\ddot{y} = \ldots$

$$\boxed{\ddot{x}\left(1 + f'(x)^2\right) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x) + g\, f'(x) = 0}$$

Gesamtenergie bleibt erhalten

$$\frac{d}{dt} E \equiv \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left(1 + f'(x)^2\right) + mg\, f(x)\right]}_{E} = 0$$

Es folgt weiterhin (Aufgabe)

$x = x(t)$

$$\lambda(t) = m\,\frac{g + \dot{x}^2 f''(x)}{1 + f'(x)^2}$$

Schiefe Ebene: $\quad f(x) = -x \tan\alpha$

$$\Rightarrow \quad \lambda(t) = \frac{mg}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$\underline{Z} = mg\cos^2\alpha\,(\tan\alpha, 1) = mg\cos\alpha\,(\sin\alpha, \cos\alpha)$$