22.10.08

22.10.08

$$M\ddot{x} = \underline{F} + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha(t)\nabla g_\alpha \qquad K \text{ Gleichungen}$$

$\Uparrow$ Lagrangesche Multiplikatoren

$$g_\alpha(\underline{x},t) = 0 \qquad \alpha = 1,\dots,r \text{ Nebenbed.}$$

Lagrange I $\qquad$ $K+r$ Gleichungen.

Elimination der Zwangskräfte $\rightarrow$ Lagrange II

$x_n \equiv x_n(q_1, \dots, q_f, t)$ $\qquad n = 1, \dots, K$

$f = K - r$ neue Koordinaten q_k

$K = d \cdot N$

$f + r = K$

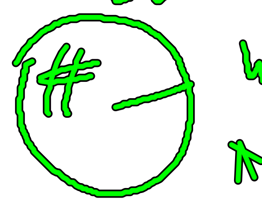
Beispiel: $K = 3$

f:

$r = 1$ NB

Neue Bewegungsgleichungen gesucht: 2 Stück

z.B. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Winkel θ, φ:

Zwangsbedingungen

$$g_\alpha\left(\underline{x}(q_1,\dots,q_f), t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial q_k} g_\alpha = \underline{\nabla} g_\alpha \cdot \frac{\partial x}{\partial q_k} = 0$$

Jetzt mit $M\ddot{\underline{x}} = \underline{F} + \sum_\alpha \lambda_\alpha(t)\, \underline{\nabla} g_\alpha \quad / \cdot \frac{\partial x}{\partial q_k}$ multipliziert:

$$M\ddot{\underline{x}} \frac{\partial x}{\partial q_k} = \underline{F} \frac{\partial x}{\partial q_k}$$

kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} M \dot{\underline{x}}$

$$\left(\qquad \right) \begin{pmatrix} m_1 & & & & & & \\ & m_1 & & & & & \\ & & m_1 & & & & \\ & & & m_2 & & & \\ & & & & m_2 & & \\ & & & & & m_2 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Für ebene PKO $T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right) \neq \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$

T hängt von $q_k, \dot{q}_k$ ab

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \dot{\underline{x}} M \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} = \dot{\underline{x}} M \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \dot q_k} = \dot{\underline{x}} M \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}$$

„Kürzen von Punkten":

$$\dot x_n = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot q_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \dot x_n}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k} .$$

$\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}$ wäre in kartes. KO mit $T = \frac{1}{2} m v^2$

$v = \dot q_k$

: $\frac{\partial T}{\partial v} = m v$

→ Bilde Zeitableitung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} = \ddot{\underline{x}} M \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} + \dot{\underline{x}} M \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}}_{\partial \dot{\underline{x}}/\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = m\dot v = \dot p$$

$$(= F)$$

$$= \underbrace{\ddot{\underline{x}} M \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}}_{\underline{F}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}} + \underbrace{\dot{\underline{x}} M \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k}}_{\partial T/\partial q_k}$$

(AUFGABE)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \underline{F}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = Q_k \;)$$

Q_k: verallgemeinerte Kraft.

Jetzt für konservative Kräfte $\underline{F} = -\underline{\nabla}\, U(\underline{x}, t)$

$$\Rightarrow \quad Q_k = \underline{F}\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = -\underline{\nabla}\, U \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_k} U(\underline{x}(q_1, \dots, q_f, t), t)$$

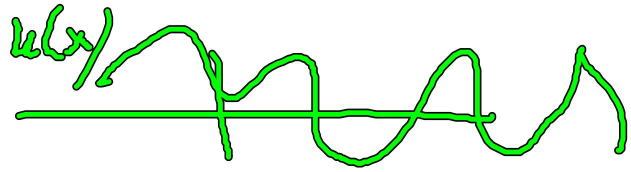
<u>Def.:</u> Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot q_1, \dots, \dot q_f) \equiv T - U$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, f}$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Beispiele



1) Kartesische KO in 1d

$$L(x, \dot x) = T - U = \frac{1}{2} m \dot x^2 - U(x)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} m \dot x + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \left(= F(x)\right)$$

2) Polarkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$q_1 = r$$
$$q_2 = \theta$$
$$q_3 = \varphi$$

$$L(\;) = \frac{1}{2} m \underline{v}^2$$
$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2\right)$$

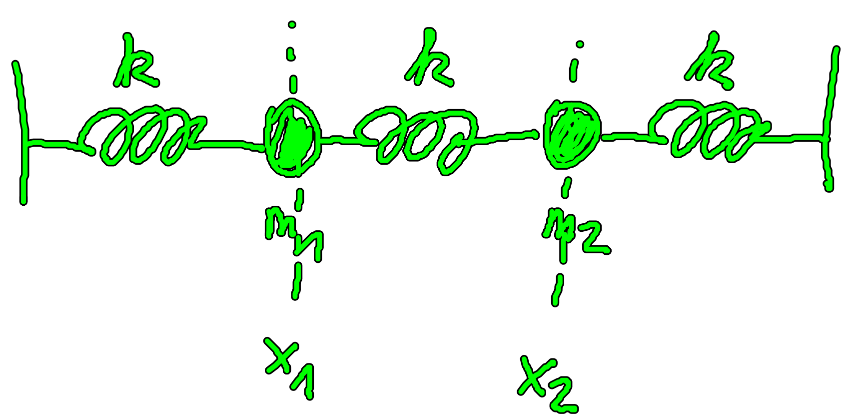
(kein Potential)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt} m\dot{r} - m r\dot{\theta}^2 - m r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0$$

$\rightarrow$ Beschleunigung

3)



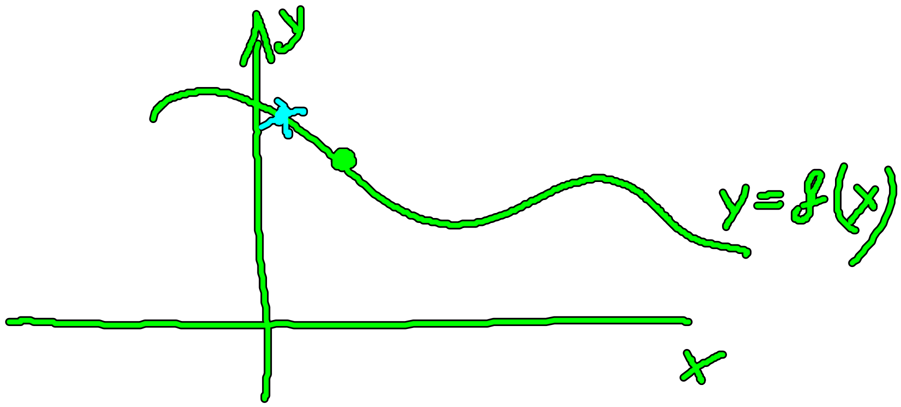
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$
$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

$$L = T - \mathcal{U} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k x_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

4) Bewegung entlang einer Kurve $y = f(x)$



Bogenlänge s als neue Koordinate

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt, \quad L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

$(V = 0)$

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \dot{y} = \dot{x} f'(x)$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 (1 + f'(x)^2)}\, dt$$

$$\overset{L\,\text{II}}{\Longrightarrow} \quad m \ddot{s}(t) = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 (1 + f'(x)^2)}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x}\left(1+f'(x)^2\right) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x) = 0$$

Entlang der Kurve wirkt die Kraft

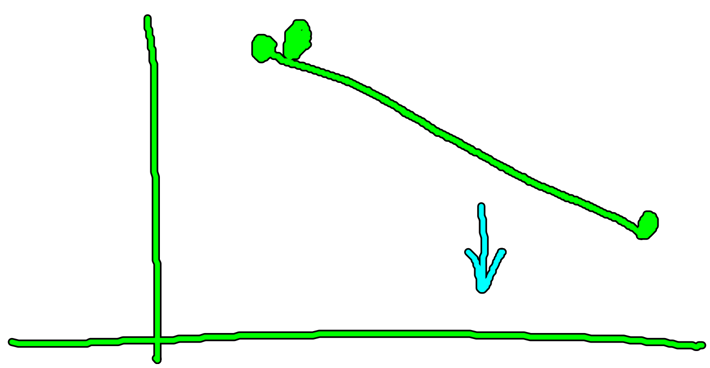
$$F(s) = -\frac{d}{ds} U(s)$$

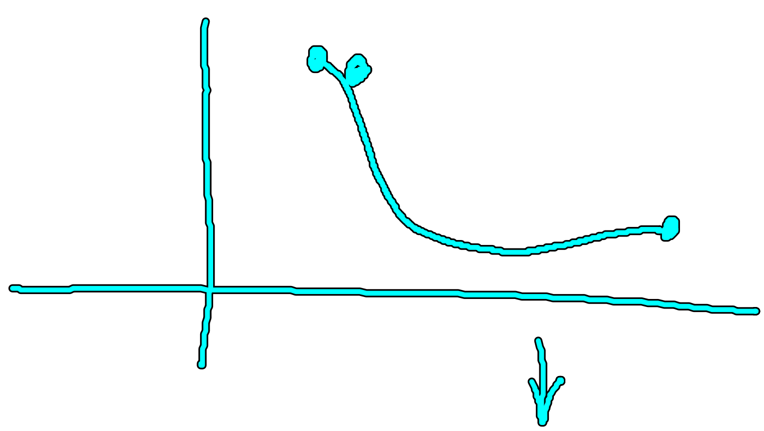
Energiesatz $\quad \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + U(s)}_{E}\Big) = 0,$

denn $\quad m \dot{s} \ddot{s} + \frac{\partial U}{\partial s} \dot{s} = \dot{s}\Big(\underbrace{m\ddot{s} + \frac{\partial U}{\partial s}}_{0}\Big) = 0$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + U(s) \Rightarrow t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{\sqrt{2\left[E - U(s')\right]/m}}$$

Beispiel:

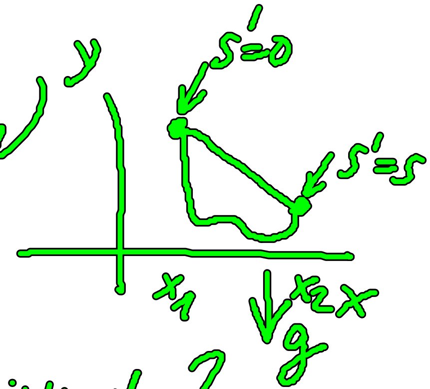




2.3. Extremalprinzipien

2.3.1. Das Brachistochronen-Problem

Bernoulli 1696



Massenpunkt bewegt sich von $P_1=(x_1,y_1)$ nach $P_2=(x_2,y_2)$, $U(x)=mg\,f(x)$

$f(x)=y$

Für welches $f(x)$ wird $t-t_0$ minimal?

$$t=\int_0^S \frac{ds'}{\sqrt{2[E-U(s')]/m}}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\sqrt{2(E/m-g\,f(x))}}$$

$$\overset{!}{=} \min$$

$$t[f(x)]\overset{!}{=}\min$$

2.3.2. Einschub: Variationsableitungen (Funktionalableitungen).

vektorwertige Funktion $\underline{u}(\underline{x})=(u_1(\underline{x}),\ldots,u_m(\underline{x}))$

mit $u_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Def: $\mathcal{F}[\underline{u}] \equiv \int\limits_{\Omega} d^n \underline{x}\; F(\underline{x}, u_1(\underline{x}), \dots, u_m(\underline{x}), \underline{\nabla} u_1, \dots, \nabla u_m)$

Ω Gebiet im $\mathbb{R}^n$

mit F zweimal stetig diff.

und u_i einmal "

wird als Funktional $\mathcal{F} : \underline{u} \to \mathbb{R}$.

Def: Das Argument $\underline{u}(\underline{x})$ in $\mathcal{F}$ werde "ein wenig" variiert, d.h. $\underline{u}(\underline{x}) \to \underline{u}(\underline{x}) + \varepsilon\, \underline{h}(\underline{x})$ mit $\varepsilon > 0$ und $\underline{h}(\underline{x}) = (h_1(\underline{x}), \dots, h_m(\underline{x}))$.

Dann heißt

$$\delta \mathcal{F}_{\underline{u}}[\underline{h}] \equiv \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}[\underline{u} + \varepsilon \underline{h}] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{F}[\underline{u} + \varepsilon \underline{h}] - \mathcal{F}[\underline{u}]}{\varepsilon}$$

1. Variation (Funktionalableitung) von $\mathcal{F}$ im Punkt $\underline{u}$ in Richtung $\underline{h}$.

Funktion $f(\underline{x})$	Funktional $\mathcal{J}[\underline{u}]$
Punkt $\underline{x}$ ist Vektor in $\mathbb{R}^n$	Punkt $\underline{u}$ ist eine Funktion
Richtungsabl. in Richtung $\underline{v}$: $\underline{v}\,\underline{\nabla} f(\underline{x})$	1. Variation $\delta \mathcal{J}_{\underline{u}}[\underline{h}]$

Def: Die Funktion $\underline{u}(\underline{x})$ heißt stationärer Punkt von $\mathcal{J}[\underline{u}]$, falls

$\delta \mathcal{J}_{\underline{u}}[\underline{h}] = 0$ für alle $\underline{h}(\underline{x})$, die auf dem Rand des Gebiets Ω verschwinden.

Satz: Ein stationärer Punkt $\underline{u}(\underline{x})$ des Funktionals $\mathcal{J}[\underline{u}]$ genügt den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} - \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0; \quad u_{i,k} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{m,k}} - \frac{\partial F}{\partial u_m} = 0$$

Beweis: $\underline{u}(\underline{x}) = u_1(\underline{x})$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} J[u_1 + \varepsilon h_1]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_\Omega d^n x\, F[\underline{x}, u_1 + \varepsilon h_1, \underline{\nabla} u_1 + \varepsilon \underline{\nabla} h_1]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_\Omega d^n x \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} h_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} \frac{\partial h_1}{\partial x_k} \right)$$

partielle.

$$= \int_\Omega d^n x \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} \right) h_1(\underline{x})$$

beliebige

$$\rightarrow \quad (\quad) = 0$$

Entsprechend für m-komponentiges $\underline{u}$