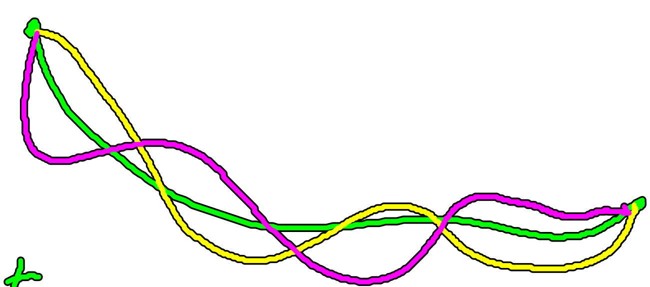
28.10.

28.10.2008



Funktional

$$\mathcal{F}[\underline{u}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F\left(t, u_1(t), \dots, u_n(t); \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_n(t)\right)$$

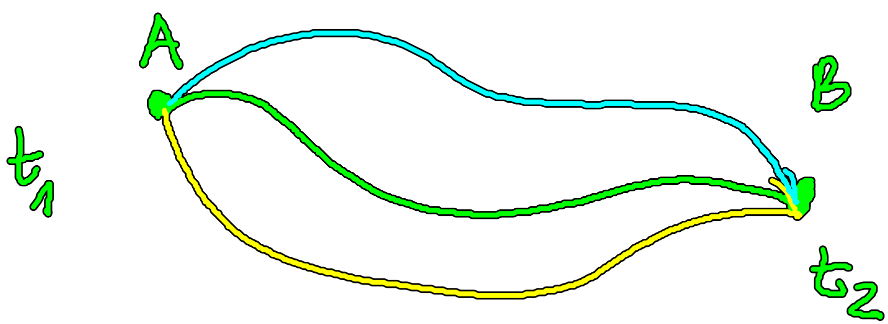
stationärer Punkt $\underline{u}$ erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_m} - \frac{\partial F}{\partial u_m} = 0$$

Mechanisches System mit Konfigurationsraum (Raum der verallg. KO $q_1, \dots, q_f$
f: # Freiheitsgrade).



Welche Kurve $\underline{q}(t)$ verbindet A und B.
Mögliche Kurven sollen gleiche Anfangs- und Endpunkte haben

$$\left.\begin{array}{l} q(t) \\ \dot q(t) \end{array}\right\}$$ Zustand des Systems

Hamiltonsches Prinzip: gegeben: Zeitintervall $[t_1, t_2]$, mech. System mit f Freiheitsgraden

Lagrangefunktion $L(q(t), \dot q(t), t)$

üblicherweise $L = T - V$

T: kin. Energie, V: pot. Energie

Definiere das Wirkungsfunktional

$$S[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot q(t), t)$$

„Die Wirkung"

„Das Wirkungsintegral"

Dann gilt:

Die Dynamik des mech. Systems in der Zeit von t_1 nach t_2 wird durch einen stationären Punkt $\underline{q}(t)$ der Wirkung beschrieben.

„Die Natur wählt die Bahn $\underline{q}(t)$ derart, dass die zugehörige Wirkung extremal wird".

- Extremal im Vergleich zu anderen Bahnen

$$\underline{q}(t) + \varepsilon \underline{h}(t)$$

$$\text{mit } \underline{h}(t_1) = \underline{h}(t_2) = 0$$

Daraus folgt notwendig (mit dem obigen Theorem $F = L$)

$n = 1$

$m = f, \quad \Omega = [t_1, t_2]$

$$\delta S[\underline{q}] = 0 \qquad \text{Hamiltonsches Prinzip}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f}$$

- Hamiltonsches Prinzip „scheinbar nicht kausal, sondern teleologisch" (SOMMERFELD). „durch die Zukunft festgelegt" ?!

- letztendlich ist das H. Prinzip ein „theoretisches Hilfskonzept", um die „richtigen" Bewegungsgleichungen zu bekommen.

Nicht-Eindeutigkeit von L $\longrightarrow$ Eichtransformationen

Satz: Zwei Lagrange-Funktionen L und L' führen zu denselben E-L Gleichungen (Lagrange II) genau dann, wenn sie sich um eine totale Ableitung einer Funktion $M(q(t), t)$ unterscheiden, d.h.

$$L = L' + \frac{d}{dt} M$$ „Eichtransformation"

$$S = \int^{t_2} dt\, L = \int^{t_2} dt \left(L' + \frac{d}{dt} M \right)$$

$$= \overbrace{S' + M(q(t_2), t_2) - M(q(t_1), t_1)}^{\int_{t_1}^{t_2}} \quad \Big/\!\!\Big/ \; \delta$$

$$\delta S = \delta S'$$

Wir zeigen $\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)}_{\text{„Euler-Ableitung"}} \underbrace{\frac{d}{dt} M(q(t), t)}_{\left[\sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial M}{\partial t}\right]}$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial q_k}}_{\sum_l \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial M}{\partial q_k}\dot q_l + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q_k}} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l}\dot q_l - \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial M}{\partial t}$$

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial M}{\partial q_k}\dot q_l + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial q_k}} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_l \frac{\partial M}{\partial q_l}\dot q_l - \cancel{\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial M}{\partial t}}$$

$$= 0$$

Symmetrien und Noether-Theorem

$$q(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad L = \frac{1}{2} m \dot q^2$$

freies Teilchen in $d = 3$

$h_s: \; q(t) \mapsto \underline{Q}(s,t) = q(t) + s\,\underline{e}_1$

$$= \big(x(t)+s,\; y(t),\; z(t)\big)$$

„Translation in x-Richtung"

Abl. nach der Zeit t

$$\frac{d}{ds} L\big(Q(s,t), \dot{Q}(s,t), t\big) = \frac{d}{ds}\frac{1}{2} m \dot{Q}^2(s,t) = 0$$

Die Lagrange-Funktion ist invariant unter der Transformation h_S

$\Rightarrow$ wir erhalten dieselben Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{q} = 0$$

$$m\ddot{\underline{Q}} = 0$$

Satz (Theorem von Emmy Noether)

Die Wirkung $S[q]$ eines mech. Systems mit Lagrange Fkt L sei unter der Transformation

$h_s: \; q(t) \longrightarrow \underline{Q}(s,t), \quad h_{s=0} = id$

invariant, d.h. die Wirkung habe die kontinuierliche Symmetrie $S[q] = S[Q]$.

Dann gilt für die Lösungskurven $q(t)$ (Lös. v. Lagrange II):

$$I[q,\dot q] \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{ds}Q(s,t)\Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} I[q,\dot q] = 0, \text{ d.h.}$$

die Größe $I[q,\dot q]$ ist eine Erhaltungsgröße.

Beweis: S invariant unter h_s

$$0 = \frac{d}{ds} S[Q(s,t)]\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{ds} L(Q(s,t), \dot Q(s,t), t)\Big|_{s=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{d}{ds}Q(s,t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{ds}\dot Q(s,t)\right]_{s=0} \quad \text{P.I.}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]}_{=0 \ (\text{E-L})}\frac{d}{ds}Q(s,t)\right)_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{ds}Q(s,t)\Big|_{t_1}^{t_2}{}_{s=0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{ds}Q(s,t)}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$A(t_2) - A(t_1)$$

$\Rightarrow$ jetzt $\lim t_2 \to t_1$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{ds} Q(s,t)\Big|_{s=0}} = 0$$

A) N=1 Teilchen, Translationsinvarianz

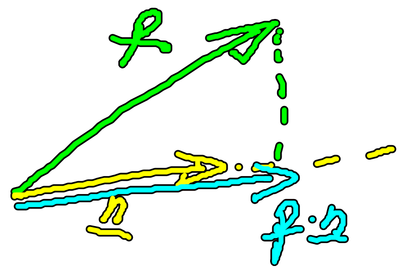
$$L = T - V = \underline{\frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2} - V(\underline{x})$$

$$q(t) = \underline{x}(t) \xrightarrow[h_s]{} Q(s,t) = \underline{x}(t) + s\,\hat{\underline{n}}$$

$\hat{\underline{n}}$: Richtung, in der $V(\underline{x})$ sich nicht ändert.

$$I[q,\dot{q}] = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} \frac{d}{ds} Q(s,t)\Big|_{s=0} = \underbrace{m\dot{\underline{x}}}_{\underline{p}} \cdot \hat{\underline{n}} = \underline{p} \cdot \hat{\underline{n}} =$$

die Komponente des Impulses $\underline{p}$ in $\underline{n}$-Richtung



N=1 Teilchen, Rotationsinvarianz in d=3

Lagrange - Fkt.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - V(\rho, z)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Invariant unter Rotationen um die z-Achse, z.B. um den Winkel $s = \varphi$

$$\underline{q}(t) = \underline{x}(t) \to \underline{Q}(\varphi, t) = R_z(\varphi)\, \underline{x}(t)$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I[q, \dot{q}] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{d\varphi} \underline{Q}(\varphi, t)\Big|_{\varphi = 0}$$

$$= \underbrace{m \dot{\underline{x}}}_{\underline{p}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\underline{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underline{p} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= p_x y - p_y x = -L_z$$

$$\underline{L} = \underline{x} \times \underline{p} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Drehimpuls in z-Richtung bleibt konstant!

Falls $V = V(|\underline{x}|)$, dann folgt

Rotationssymmetrie $\Longrightarrow$

Drehimpulserhaltung (für alle Komponenten).

Das d'Alembertsche Prinzip

„Prinzip der virtuellen Verrückungen"

Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} m \underline{\dot{x}}^2 - V(\underline{x})$ und

holonome NB $g(\underline{x}) = 0$

Betrachte Kurve $\underline{x}(t)$ und kleine

Variationen $\underline{x}(t) + \varepsilon \underline{h}(t)$

$h(t)$ in Tangentialebene von der Fläche $g(\underline{x}) = 0$

Dann gilt: $\underline{x}(t)$ ist Extremalpunkt der

Wirkung S bzgl. Variationen

$\underline{x}(t) \to \underline{x}(t) + \varepsilon \underline{h}(t)$, $\underline{h}(t) = 0$

am Anfangs/Endpunkt

$\Longleftrightarrow$ für alle $\underline{h}(t)$ gilt

$$\underline{Z} = m\ddot{\underline{x}} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \perp \underline{h}$$

„Zwangskraft $\underline{Z}$ steht senkrecht auf den virtuellen Verrückungen".